Задание 1.

Про действительные числа a, b, c, d известно, что

$$ab = cd = 2025, \quad a + c = b + d, \quad a + b \neq c + d.$$

Чему может быть равно значение $a + b + c + d$?

Ответ: Только 0

Первое решение. Перепишем второе условие в виде $a - b = d - c$ и подставим $b = 2025/a$, $c = 2025/d$:

$$a - \frac{2025}{a} = d - \frac{2025}{d}, \text{ или } (a - d) \cdot \frac{ad + 2025}{ad} = 0,$$

т.е. или $a = d$ (но тогда $b = c$ и $a + b = c + d$, что не так по условию), или $ad = -2025$. Во втором случае, легко видеть, что $b = -d$, $a = -c$, откуда $a + b + c + d = 0$.

Второй решение. Также, как и в первом решении, перепишем второе условие как $a - b = d - c$. Заметим, что

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = (d - c)^2 + 4cd = (c + d)^2,$$

откуда, с учётом $a + b \neq c + d$, имеем $a + b = -c - d$, т.е. ответ 0.

Задание 2.

Пусть $n > 3$ — натуральное число. Сколько существует способ выбрать два не пересекающихся прямоугольника внутри квадрата $n \times n$, идущих по линиям сетки? Прямоугольники пересекаются, если у них есть хотя бы одна общая внутренняя клетка или общая точка на границе.

В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от n.

Ответ: $2 \cdot C_{n+1}^4 \cdot \left(C_{n+1}^2\right)^2 - 2 \cdot \left(C_{n+1}^4\right)^2$.

Решение. Прямоугольник можно задать двумя интервалами: один определяет его горизонтальную сторону, а другой — вертикальную. Чтобы прямоугольники не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы либо горизонтальные, либо вертикальные интервалы были непересекающимися (возможно, оба).

Сначала посчитаем количество способов, при которых горизонтальные интервалы не пересекаются. Пусть эти интервалы — $[a, b]$ и $[c, d]$. Поскольку порядок прямоугольников не имеет значения, без потери общности можно предположить, что $a < c$, то есть $a < b < c < d$. Тогда количество способов выбрать a, b, c, d равно C_{n+1}^4. На вертикальные интервалы ограничений нет, поэтому количество способов выбрать их равно $\left(C_{n+1}^2\right)^2$. Таким образом, общее количество пар прямоугольников с непересекающимися горизонтальными интервалами равно $C_{n+1}^4 \cdot \left(C_{n+1}^2\right)^2$. По симметрии, количество пар прямоугольников с непересекающимися вертикальными интервалами такое же.

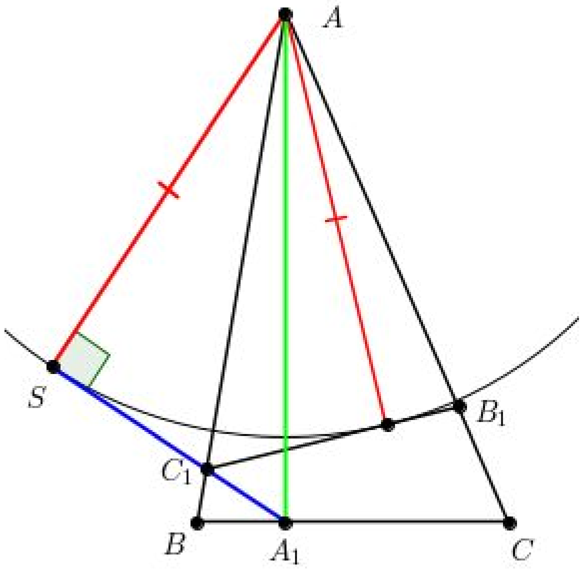
Осталось посчитать и вычесть количество способов, при которых и горизонтальные, и вертикальные интервалы не пересекаются. Пусть горизонтальные интервалы — $[a, b]$ и $[c, d]$, а вертикальные — $[e, f]$ и $[g, h]$. Без потери общности можно предположить $a < b < c < d$, поэтому количество способов выбрать горизонтальные интервалы равно C_{n+1}^4. Однако случаи $e < f < g < h$ и $g < h < e < f$ теперь различны, поэтому количество способов выбрать вертикальные интервалы равно $2 \cdot C_{n+1}^4$. Следовательно, количество пар прямоугольников, у которых и горизонтальные, и вертикальные интервалы не пересекаются, равно $2 \cdot \left(C_{n+1}^4\right)^2$.

Задание 3.

В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. Известно, что расстояние от точки A до BC и B_1C_1 равны 24 и 20 соответственно. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: $8\sqrt{11}$**.**

Решение. Известно, что точка A является центром вневписанной окружности для треугольника $A_1B_1C_1$. Например, это можно доказать так: $\angle AC_1B_1 = \angle ACB = \angle A_1C_1B$, откуда C_1A — внешняя биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$, аналогично для B_1A. Тогда расстояние от A до B_1C_1 это просто радиус этой вневписанной окружности.



Пусть S — основание перпендикуляра из A на A_1C_1, т.е. точка касания нашей вневписанной окружности с A_1C_1. Тогда $AS = 20$, $AA_1 = 24$, откуда по теореме Пифагора

$$A_1S = \sqrt{24^2 - 20^2} = 4\sqrt{11}.$$

С другой стороны, известный факт, что расстояние от вершины до точки касания со вневписанной окружностью равняется полупериметру треугольника, откуда и следует ответ.

Задание 4.

Множество натуральных чисел M назовём *хорошим*, если выполнены следующие два условия:
(i) M содержит все натуральные числа, меньшие 2025;
(ii) если $n \in M$, то в M лежат все члены арифметической прогрессии, первый член которой равен n, а разность равна $n + 1$.
Верно ли, что для любого хорошего множества M существует такое натуральное число N, что в M лежат все натуральные числа, не меньшие N?

Ответ: Нет, неверно.

Решение. Рассмотрим множество M', в котором лежат все числа из M, увеличенные на 1.

Тогда условие переписывается в виде
(i) M' содержит все натуральные числа от 2 до 2025;
(ii) если $m \in M'$, то в M' лежат все члены арифметической прогрессии, первый член которой равен m, а разность равна m.

Верно ли, что для любого такого множества M' существует такое натуральное число N, что в M' лежат все натуральные числа, не меньшие N?

Заметим, что «все члены арифметической прогрессии, первый член которой равен m, а разность равна m» – это просто все числа, кратные m.

Возьмём в качестве M' все натуральные числа, не меньшие 2, кроме простых чисел, больших 2025. Легко видеть, что оно подходит под оба условия, но в силу бесконечности множества простых, не подходит под утверждение.

Задание 5.

Пусть S_n — множество всех возможных биекций множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

Для любых U, V, $W \subset S_n$ обозначим через N_{UVW} количество способов выбрать $f \in U$, $g \in V$, $h \in W$ так, что $f(g(h(x)))$ — тождественное отображение, т.е. для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено $f(g(h(k))) = k$.

Пусть A, B, C таковы, что $A \cup B \cup C = S_n$ и $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$. Докажите, что $N_{ABC} = N_{CBA}$.

Решение. Через $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ будем обозначать объединение множеств, которые попарно не пересекаются.

Элементы S_n мы, по традиции, будем называть *перестановками*, а также для каждой пары пересетановок f_1 и f_2 мы можем определить их *композицию*, т.е. перестановку $f_1 \circ f_2$ такую, что $(f_1 \circ f_2)(x) := f_1(f_2(x))$. Тождественную перестановку будем обозначать id.

Таким образом, N_{UVW} по сути — количество троек (f, g, h) таких, что $f \circ g \circ h = \mathrm{id}$ и $f \in U$, $g \in V$, $h \in W$.

Мысль 1. Начнём решение с простого, но важного наблюдения: если $U = U_1 \sqcup U_2$, то

$$N_{UVW} = N_{U_1VW} + N_{U_2VW},$$

т.е. если U представлено в виде объединения двух непересекающихся множеств, то все тройки, соответствующие N_{UVW} способам выбрать f, g и h, очевидно, разбиваются на тройки по тому, откуда берётся f – из U_1 или U_2.

В частности,

$$N_{ABC} + N_{BBC} + N_{CBC} = N_{S_nBC}.$$

С другой стороны, легко видеть, что N_{S_nBC} равно $|B| \cdot |C|$: для любого способа взять $g \in B$ и $h \in C$ существует ровно одна биекция f такая, что $f \circ (g \circ h) = \mathrm{id}$.

Мысль 2. Для любых U, V, W выполнено $N_{UVW} = N_{VWU}$ (а значит и N_{WUV}). Для этого достаточно проверить, что $f \circ g \circ h = \mathrm{id}$ тогда и только тогда, когда $g \circ h \circ f = \mathrm{id}$. Проследим за судьбой какого-то числа $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ при подстановке в $f \circ g \circ h$. Под действием $g \circ h$ пусть k переходит в k'. Тогда $f(k') = k$. Но тогда

$$(g \circ h \circ f)(k') = (g \circ h)(k) = k'.$$

Поскольку пока k пробегает все числа от 1 до n, число k' также пробегает все эти числа, утверждение остаётся верным.

Теперь у нас есть всё, чтобы решить задачу:

$$\begin{gathered} N_{ABC} = N_{S_nBC} - N_{BBC} - N_{CBC} = |B| \cdot |C| - N_{BBC} - N_{CBC} = \\ = N_{S_nCB} - N_{BCB} - N_{CCB} = N_{ACB} = N_{CBA}. \end{gathered}$$