Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

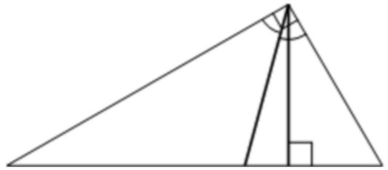
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

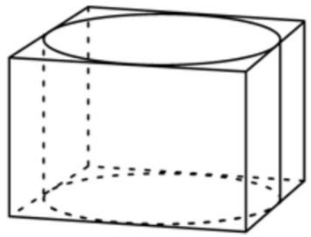


Ответ: ___________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(7;1)$ и $\vec{b}\,(-1;-7)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: ___________________________.

3 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 27

4 Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Ответ: ___________________________.

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения

$(x+4)^3=-125.$

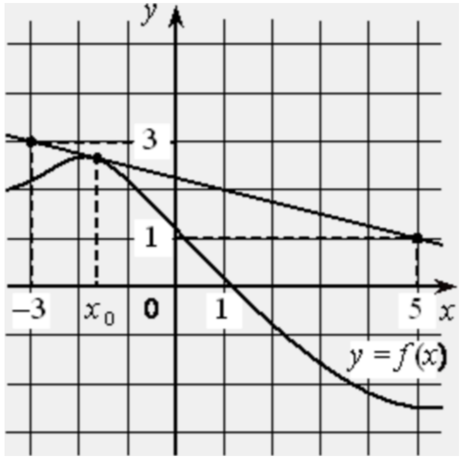
Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения

$\dfrac{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{24}}.$

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

9 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1=60$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление вычисляется по формуле $R_{\text{общ}}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 10 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

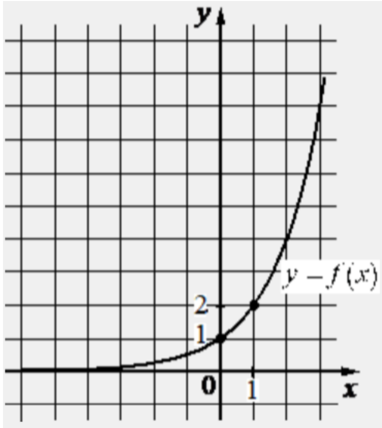
Ответ: ___________________________.

10 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 27

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции

$y = (x^2 - 17x + 17) \cdot e^{7-x}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^3 x + 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin x = 2\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.
б) Точка N — середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

15 Решите неравенство

$$\log_{125}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \geq \log_5(x^2 - 4) - 2.$$

16 В июле Фёдор планирует взять в кредит 1,1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года Фёдор должен выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество лет Фёдор может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300 тысяч рублей?

17 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$$

имеет ровно два решения.

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.
Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 27

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	31	
2	-0,28	
3	32	
4	0,6	
5	0,83	
6	-9	
7	2	
8	-0,25	
9	12	
10	30	
11	8	
12	2	
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{5\pi}{3}$	
14	$\sqrt{15}$	
15	$(2; 23]$	
16	5	
17	$\sqrt{65}$	
18	$\{-2\} \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$	
19	а) да б) нет в) 30	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

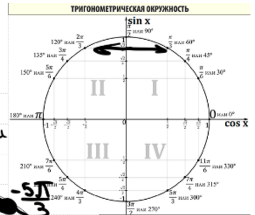
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^3 x + 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin x = 2\sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2021

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

4 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

а) $4\sin^3 x + 2\sqrt3\cdot(1-2\sin^2 x) + 3\sin x - 2\sqrt3 = 0$

$4\sin^3 x + \cancel{2\sqrt3} - 4\sqrt3\sin^2 x + 3\sin x - \cancel{2\sqrt3} = 0$

$\sin x\cdot\left(4\sin^2 x - 4\sqrt3\sin x + 3\right) = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi n; n\in Z$

$(2\sin x - \sqrt3)^2 = 0$

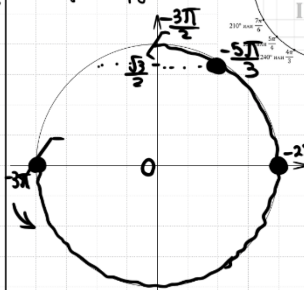
$2\sin x - \sqrt3 = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt3}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n\in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = -3\pi$

$x = -2\pi$

$x = -2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$

Ответ: а) πn, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n\in Z$

б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{5\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.

б) Точка N — середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2017

а) ① Пусть K - сер. SC

E - сер. BC

② Пусть $AB = 2x = AD = AS$

$BE = x = CE$

③ ΔABE:

$AE = \sqrt5\cdot x$

ΔSBE:

$SE = \sqrt3\cdot x$

$ME = \frac{1}{3}\sqrt3 x$ (т.к. мед... 1к2, сс...)

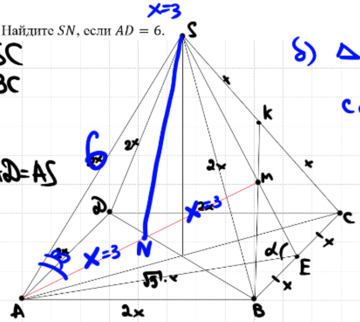
Пусть $\angle AES = \alpha$

④ ΔASE: по т.cos:

$\cos\alpha = \ldots = \frac{2}{\sqrt{15}}$

⑤ ΔAME: по т.cos:

$AM = \ldots = 2x = AD$ ■



б) ΔASM: по т.cos:

$\cos B = \frac{36+36-12}{2\cdot6\cdot6} = \frac{5}{6}$

ΔASN: по т.cos:

$SN = \ldots = \sqrt{15}$

Ответ: $\sqrt{15}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\log_{125}(x^3-6x^2+12x-8) \geq \log_5(x^2-4)-2.$$

$\log_{5^3}(x-2)^3 \geq \log_5(x^2-4)-2$

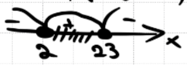
$\log_5(x-2)+\log_5 25 \geq \log_5(x^2-4)$

$\begin{cases} 25\cdot(x-2) \geq x^2-4 & (1) \\ x-2>0 & (2) \\ x^2-4>0 & (3) \end{cases}$

(1) $25\cdot(x-2)-(x-2)(x+2) \geq 0$

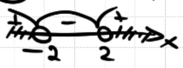
$(x-2)\cdot(25-x-2) \geq 0$

$(x-2)(23-x) \geq 0$

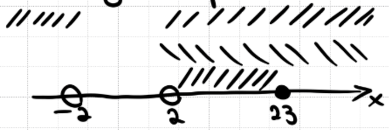


(2) $x>2$

(3) $(x-2)(x+2)>0$



Найдём пересечение.



Ответ: $(2; 23]$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

ФСУ	
1	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b-\log_a c=log_a\frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m=m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле Фёдор планирует взять в кредит 1,1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года Фёдор должен выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество лет Фёдор может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300 тысяч рублей?

ИСТОЧНИКИ

Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2022 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Ященко 2018 (50 вар)
Основная волна 2015
СтатГрад 19.04.2019

Чтобы погасить кредит за минимальное кол-во лет, нужно чтобы выплаты были как можно большими, т.е. по 300т.р.

Пусть март - месяц платежа.

	Дата	Сумма долга		
	и	1100000 р.		
1	я	1210000 р.		
	м	910000 р.	—	1 платёж 300т.р.
2	я	1001000 р.		
	м	701000 р.	—	2 платёж 300т.р.
3	я	771100 р.		
	м	471100 р.	—	3 платёж 300т.р.
4	я	518210 р.		
	м	218210 р.	—	4 платёж.
5	я	240031 р.		
	м	0 —		5 платёж

Ответ: 5 лет.

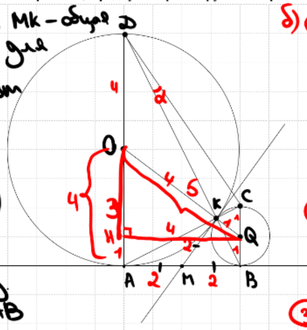
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 27

17 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.



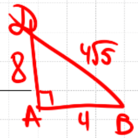
а) ① Пусть MK – общая внутр. кас. для окр.
MK = AM = BM (по св-ву отр. кас., пров. из одной точки)

② △ABK:
MK – мед.
$MK = \frac{1}{2}AB$
Значит $\angle AKB = 90^\circ$
$\angle BKC = 90^\circ$ (смежн.)
$\angle AKD = 90^\circ$
AD и BC – диаметра.

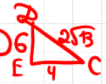
③ Пусть O – центр бол.
Q – центр. мал.
$\angle OAB = 90^\circ$
$\angle QBA = 90^\circ$
$AD \perp AB$
$BC \perp AB$ по св-ву кас.
$AD \parallel BC$ ■

б) ① Пусть QH – перп. к AD
$OH = 4 - 1 = 3$
$OQ = 4 + 1 = 5$
$HQ = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = AB$
$AM = 2 = BM = KM$

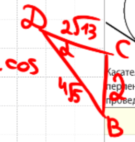
② △ABD:



③



④ △BCD по т. cos



$\cos\alpha = \ldots = \frac{8}{\sqrt{65}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$

по т. sin:

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$

$R = \sqrt{65}$

Ответ: $\sqrt{65}$

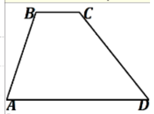
ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2019

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

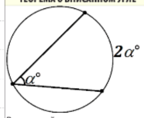
180°

СВОЙСТВО ТРАПЕЦИИ



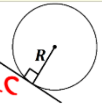
В трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



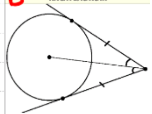
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ



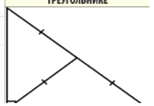
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1

обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$$

имеет ровно два решения.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (новый банк)
Ященко 2016 (36 вар)

Пусть $(ax^2 - 2x) = t$

$t^2 + (a^2 - a + 2)\cdot t - a^2\cdot(a-2) = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = -a^2 + a - 2 \\ t_1 t_2 = -a^2\cdot(a-2) \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} t = -a^2 \\ t = a - 2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} ax^2 - 2x = -a^2 \quad 0 \text{ реш} \\ ax^2 - 2x = a - 2 \quad 2 \text{ реш} \end{array}\right.$

1 случай

Если $a = 0$

$\left[\begin{array}{l} -2x = 0 \\ -2x = -2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

при $a = 0$ будет 2 раз. реш.

2 случай

Если $-a^2 = a - 2$

$a^2 + a - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 1 \end{array}\right.$

Если $a = -2$, то

$-2x^2 - 2x + 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Если $a = 1$, то

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$ – единств. реш

3 случай

$\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (-2)^2 - 4\cdot a\cdot a^2 > 0 \\ (-2)^2 - 4\cdot a\cdot(-a+2) < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 > 4a^3 \\ 4a^2 - 8a + 4 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a < 1 \\ (a-1)^2 < 0 \end{cases}$

нет реш.

4 случай

$\begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a > 1 \\ (a-1)^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a > 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$a > 1$

5 случай

$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = 4a^3 \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

$a = 1$, но т.к. при $a = 1$ будет ед. реш, то $a \neq 1$

Ответ: $\{-2\} \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *а*, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *а*	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2015

Ответ: а) да, например:

1 2 4 8 16 32 64 128

б) Пусть $a<b<c<d$
Тогда гипотенузой может быть только c или d

Если C – это гип-за, то a и b катеты
① $c^2=a^2+b^2$

Если d – это гип-за, то a и b – катеты или b и c – катеты или a и c – катеты

② $d^2=a^2+b^2$
③ $d^2=b^2+c^2$
④ $d^2=a^2+c^2$

Заметим, что если d – гип-за сразу в трёх треуг-ках, то из ур-ний ② и ③ следует, что $a=c$ (что невозм.)
из ② и ④, что $b=c$ (что невозм.)
③ и ④, что $a=b$ (что невозм.)
значит d не может быть гип-зой даже в двух тр-ках
значит можно получить не более двух „отличных троек"

в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

в) ① Пусть $a<b<c<d<e<f<g<h<i<j<k<l$
Тогда l может быть гипотенузой в ≤ 5 треугольниках
k м. б. г. в ≤ 5 тр.
j м. б. г. в ≤ 4 тр.
i м. б. г. в ≤ 4 тр.
h м. б. г. в ≤ 3 тр.
g м. б. г. в ≤ 3 тр.
f м. б. г. в ≤ 2 тр.
e м. б. г. в ≤ 2 тр
d м. б. г. в ≤ 1 тр.
c м. б. г. в ≤ 1 тр.
Получаем, что кол-во отличных троек ≤ 30

② Покажем, что 30 отличных троек може быть:
У чисел $\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$
Ответ: в) 30

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4