Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 .

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

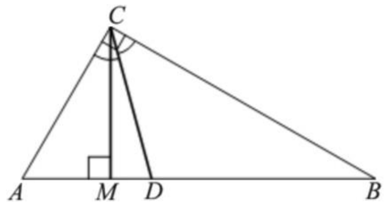
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Острый угол B прямоугольного треугольника равен 23°. Найдите угол между биссектрисой CD и высотой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

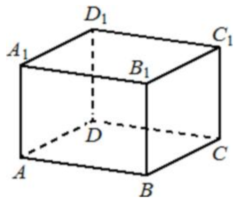


Ответ: ____________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-13;4)$ и $\vec{b}\,(-6;1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: ____________________________.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 30

4 В классе 21 шестиклассник, среди них два друга – Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в разных группах.

Ответ: ___________________________.

5 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{4x+13}.$$

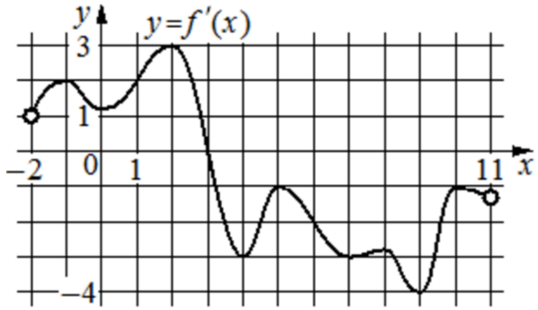
Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{81^{2,6}}{9^{3,7}}.$$

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)-$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: ___________________________.

9 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4}=p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

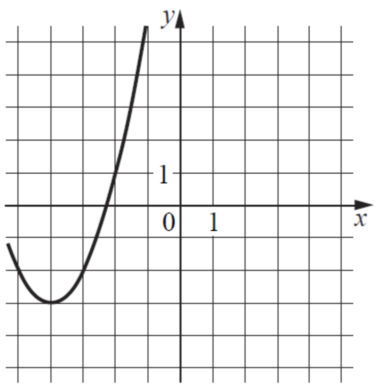
Ответ: ___________________________.

10 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 30

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos x = \sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1:4$, точка K — середина DD_1.

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MCK, если $\angle ADC = 60°$, а $\angle MKC = 90°$.

15 Решите неравенство

$$1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0.$$

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 400 тыс. рублей;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

17 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки F и E так, что FE параллельно CD, а $FC = ED$.

а) Докажите, что $\angle BCF = \angle AFE$.
б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $ED = 3BF$, $FE = 5$ и площадь трапеции $FCDE$ равна $14\sqrt{35}$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x = \sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$.

19 На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 58 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	22	
2	82	
3	30	
4	0,7	
5	0,78	
6	-9	
7	27	
8	3	
9	9,2	
10	90	
11	61	
12	4	
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n; n\in Z$ б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$	
14	$\frac{33\sqrt{6}}{10}$	
15	$\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[8;32)\cup(32;+\infty)$	
16	953,6 тыс.	
17	$\frac{73\sqrt{35}}{4}$	
18	$(-\infty;0)\cup\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$	
19	а) привели б) нет в) 6	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

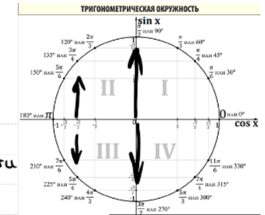
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos x=\sin 2x-1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
4	$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

а) $\sqrt{2}\cdot\left(\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}\cos x-\sin 2x+1=0$

$\cancel{\sin 2x}+\cos 2x+\sqrt{2}\cos x-\cancel{\sin 2x}+1=0$

$2\cos^2 x-\cancel{1}+\sqrt{2}\cdot\cos x+\cancel{1}=0$

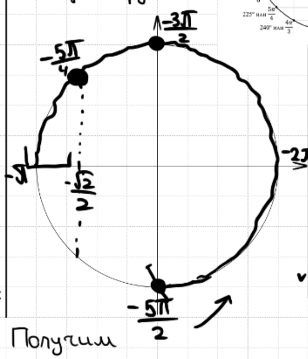
$\cos x\cdot(2\cos x+\sqrt{2})=0$

$\cos x=0$ $\qquad$ $2\cos x+\sqrt{2}=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x=-\frac{5\pi}{2}$

$x=-\frac{3\pi}{2}$

$x=-\frac{\pi}{1}-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $n\in Z$
б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD=5$ и $BC=4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=1:4$, точка K — середина DD_1.

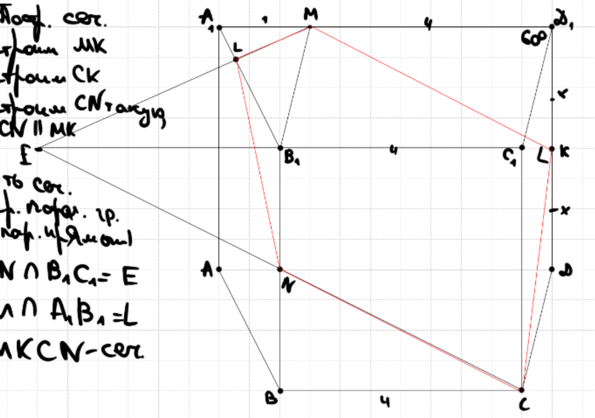
а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MCK, если $\angle ADC=60°$, а $\angle MKC=90°$.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

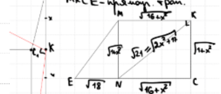
а) ① Постр. сеч.
• Построим MK
• Построим CK
• Построим CN так, что CN ∥ MK
(т.к. пл.-ть сеч. пер. парал. пл. по пар. прямым)
• $CN\cap B_1C_1=E$
• $EM\cap A_1B_1=L$
• LMKCN — сеч.



② $\triangle BCN=\triangle KD_1M$ по УСУ (...)
$BN=D_1K=\frac{1}{2}DD_1$
$BN=\frac{1}{2}BB_1$ ■

Пункт б 9 из 10

б) ① $S_{сеч.}=S_{MKCE}-S_{ELN}$
MKCE — прямоуг. трап.



Рассмотрим ABCD — трап.

по т. cos: $BD=\sqrt{4^2+1^2+2\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{21}$

$\sqrt{21}=\sqrt{2x^2+17}$

$2x^2=4$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}$

$S_{MKCE}=\frac{\sqrt{18}+2\sqrt{18}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3\cdot3\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{6}$

② $\triangle A_1ML\sim\triangle B_1EL$ по 2 углам

$k=\frac{1}{4}=\frac{LM}{LE}=\frac{y}{4y}$

$\frac{S_{LMN}}{S_{LEN}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot LM\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot LE\cdot h}=\frac{1}{4}$

Тогда $S_{ELN}=\frac{4}{5}S_{EMN}$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{18}\sqrt{3}}{2}=\frac{4\cdot3\sqrt{2}\sqrt{3}}{5\cdot2}=\frac{6\sqrt{6}}{5}$

$S_{MKCE}-S_{ELN}=\frac{9}{2}\sqrt{6}-\frac{6}{5}\sqrt{6}=\frac{33\sqrt{6}}{10}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30}\geq 0.$$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Досрочная волна 2022
Основная волна 2017

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m=m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b=c$, то $a^c=b$

ФСУ	
1	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-\log_2 32-10\log_2|x|+30}\geq 0$$

$|x| = x$, т.к. $x>0$

Пусть $\log_2 x = t$

$$\frac{1}{1}^{(t^2-10t+25}+\frac{10}{t-5}^{(t-5}+\frac{16}{t^2-10t+25}\geq 0$$

$$\frac{t^2-\cancel{10t}+25+\cancel{10t}-50+16}{(t-5)^2}\geq 0$$

$$\frac{t^2-9}{(t-5)^2}\geq 0$$

$+ \quad -3 \quad - \quad 3 \quad + \quad 5 \quad + \quad t$

$$\left[\begin{array}{l} t\leq -3\\ 3\leq t<5\\ t>5\end{array}\right.$$

$\log_2 x\leq\log_2\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\log_2 8\leq\log_2 x<\log_2 32$ $\qquad$ $\log_2 x>\log_2 32$

$0<x\leq\frac{1}{8}$ $\qquad$ $8\leq x<32$ $\qquad$ $x>32$

Ответ: $(0;\frac{1}{8}]\cup[8;32)\cup(32;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% $\cdot 1{,}2$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 400 тыс. рублей;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2022

Пусть март - месяц платежа

Дата	Сумма долга
и26	700 тыс.
я27	700 · 1,2
м27	была выплата 400
и27	700 · 1,2 − 400
я28	700 · 1,2² − 400 · 1,2
м28	была выплата 400
и28	700 · 1,2² − 400 · 1,2 − 400
я29	700 · 1,2³ − 400 · 1,2² − 400 · 1,2
м29	⇒ б.в. 700 · 1,2³ − 400 · 1,2² − 400 · 1,2
и29	0

① Платёж в 2029:

$$\overset{28}{\cancel{700}}\cdot\frac{6^3}{\cancel{5^3}_{5}}-\overset{80}{\cancel{400}}\cdot\frac{6^2}{\cancel{5^2}}-400\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{28\cdot 6^3-80\cdot 6^2-400\cdot 6}{5}=\frac{6\cdot 4\cdot(252-120-100)}{5}=$$

$$=\frac{6\cdot 4\cdot 32}{5}\begin{array}{l}\cdot 2\\ \cdot 2\end{array}=\frac{1536}{10}=153{,}6\text{ тыс.}$$

② О.С.В. $=153{,}6+2\cdot 400=953{,}6$ тыс.

Ответ: 953,6 тыс.

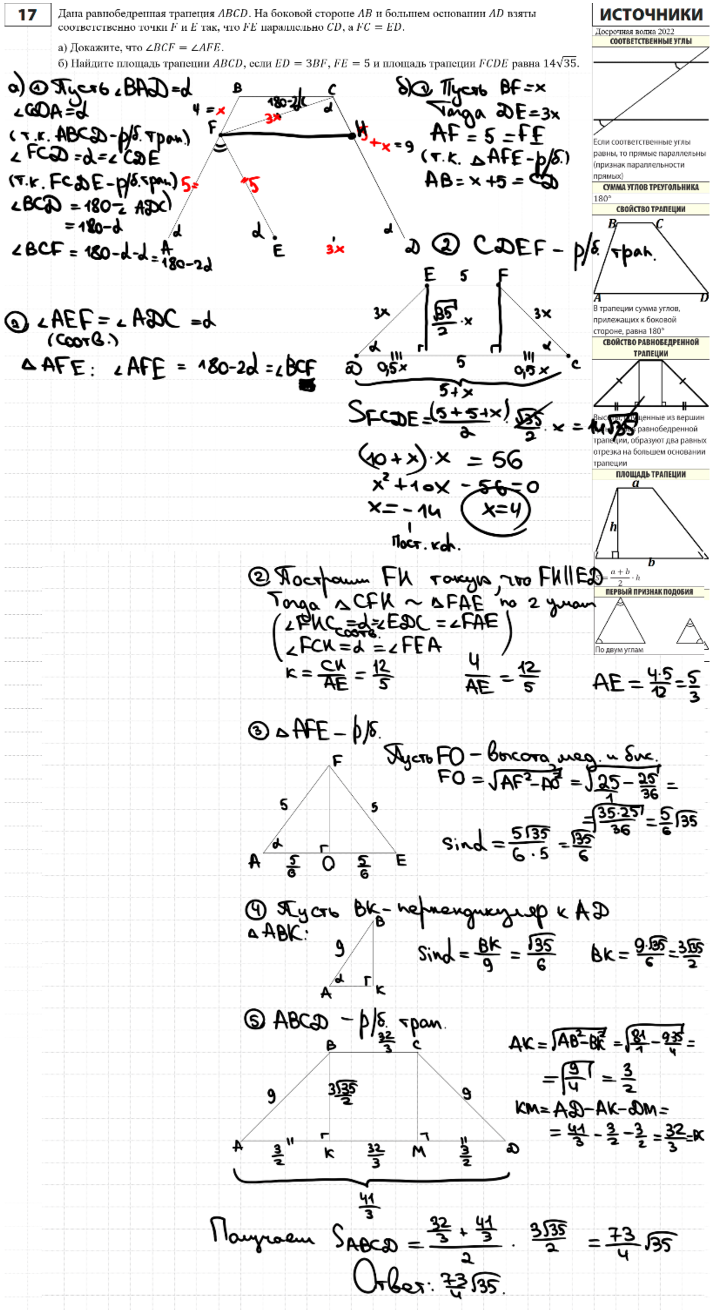
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 30

17 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки F и E так, что FE параллельно CD, а $FC = ED$.

а) Докажите, что $\angle BCF = \angle AFE$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $ED = 3BF$, $FE = 5$ и площадь трапеции $FCDE$ равна $14\sqrt{35}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 30

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$.

ИСТОЧНИКИ
Досрочная волна (Резерв) 2023
Основная волна 2017

$\sqrt{x-a}\cdot\sin x-\sqrt{x-a}\cdot\cos x=0$

$\sqrt{x-a}\cdot(\sin x-\cos x)=0$

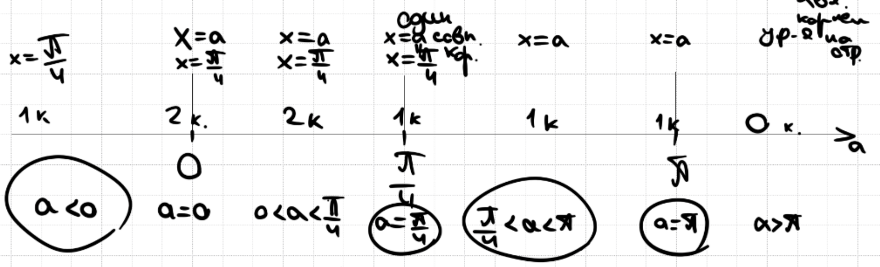
$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-a}=0\\ \sin x=\cos x\end{array}\right.\\ x-a\geq 0\\ 0\leq x\leq\pi\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\ \operatorname{tg}x=1\end{array}\right.\\ x-a\geq 0\\ 0\leq x\leq\pi\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.\\ x-a\geq 0\\ 0\leq x\leq\pi\end{cases}$

$X=a$ явл. корнем ур-я на отрезке, если $\begin{cases}x-a\geq 0\\ 0\leq x\leq\pi\end{cases}$ $\begin{cases}a-a\geq 0\\ 0\leq a\leq\pi\end{cases}$ $\begin{cases}0\cdot a\geq 0\\ 0\leq a\leq\pi\end{cases}$

при $0\leq a\leq\pi$ $x=a$ явл. корнем ур-я на отр.

$x=\frac{\pi}{4}$ явл. корнем ур-я на отрезке, если $\begin{cases}\frac{\pi}{4}-a\geq 0\\ 0\leq\frac{\pi}{4}\leq\pi\end{cases}$

$X=a$ совпадает с $x=\frac{\pi}{4}$ при $a=\frac{\pi}{4}$ при $a\leq\frac{\pi}{4}$ $x=\frac{\pi}{4}$ явл. корнем ур-я на отр.



Ответ: $(-\infty;0)\cup\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 30

19

На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 58 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ 14 ~~15~~ 16 17 18 ~~19~~ 20 ~~21~~ ~~22~~ ~~23~~ ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ ~~29~~ 30

а) 59 (25; 19; 15)
60 (26; 24; 10)
61 (27; 23; 11)
62 (28; 22; 12)
63 (29; 21; 13)

Ответ: а) приведен.

б) ① Минимально возможные тройки
59 60 61 62 63 64 65 66 67 68

Стёрли с доски $\geq \frac{59+68}{2} \cdot 10$
Стёрли с доски ≥ 635

② На доске сумма чисел была $\frac{1+30}{2} \cdot 30 = 465$

НО сумма стёртых с доски троек ≥ 635, что невозможно!

Ответ: б) нет.

в) ① Заметим, что можно добавить 6-й ход к пяти ходам из (30; 20; 14)
$\Rightarrow$ 6 ходов могло быть.

② Могло ли быть 7 ходов?
Минимально возможные тройки:
59 60 61 62 63 64 65

Стёртые 7 троек $\geq \frac{59+65}{2} \cdot 7$
Стёртые 7 троек ≥ 434

Максимально возможные стёртые числа:
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Стёртые 7 троек $\leq \frac{10+30}{2} \cdot 21$
Стёртые 7 троек ≤ 420

Получаем $434 \leq$ Стёртые 7 троек ≤ 420, что невозможно
$\Rightarrow$ 7 и более ходов быть не может
$\Rightarrow$ кол-во ходов ≤ 6
Пример для 6 ходов указан выше.
Ответ: в) 6

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 30