Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

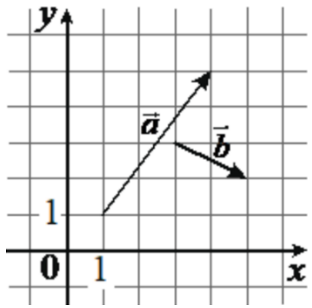
Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь треугольника ABC равна 183, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: ___________________________.

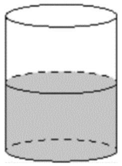
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 32

3 В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



Ответ: ____________________________.

4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,81. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 19.

Ответ: ____________________________.

5 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\sqrt{6+5x}=x.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

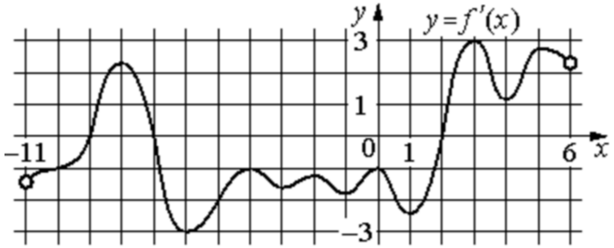
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$4\log_{1,25}5\cdot\log_5 0{,}8.$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;4]$.



Ответ: ____________________________.

9 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 64 километра? Ответ дайте в метрах.

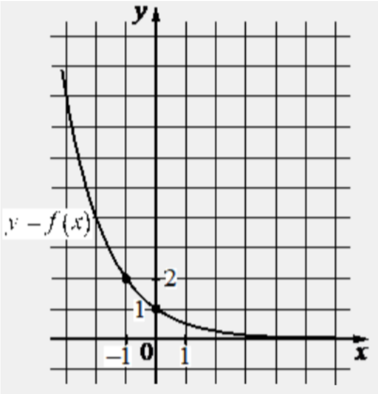
Ответ: ____________________________.

10 Расстояние между городами A и B равно 420 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 32

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = 20\operatorname{tg} x - 20x + 5\pi - 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2{,}5]$.

14 В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом $60°$ при вершине A. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M — середина ребра A_1B_1.
б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $B_1K : KC_1 = 1 : 3$.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^2 - \log_5 x^2}{\log_{15}^2(2x^2 - 6x + 4{,}5) + 1} \geq 0.$$

16 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

17 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

19 а) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена
$x^2 + mx + n$ равен 33?
б) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена
$x^2 + mx + n$ равен 26?
в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трёхчлена
$x^2 + (5m + n)x + (8n + m)$, если известно, что числа m, n и D – натуральные?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	137,25	
2	11	
3	2275	
4	0,25	
5	0,33	
6	6	
7	-4	
8	1	
9	320	
10	240	
11	16	
12	14	
13	а) $2; 2\sqrt{2}$ б) 2	
14	$\sqrt{3}$	
15	$(-\infty; -1] \cup [1; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$	
16	80,5 млн	
17	$3:4$	
18	$[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$	
19	а) да б) нет в) 21	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2{,}5]$.

ИСТОЧНИКИ

Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна (Резерв) 2025
Основная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2016

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

СТЕПЕНИ

1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

а) Пусть $\log_8 x = t$

$6t^2 - 5t + 1 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $t = \frac{1}{3}$

$\log_8 x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\log_8 x = \frac{1}{3}$

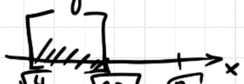
$x = \sqrt{8} = \underline{2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $x = 8^{\frac{1}{3}} = \underline{2}$

б) $\sqrt{8}$

$2 = \sqrt{4}$

$2{,}5 = \sqrt{6{,}25}$

Получаем:



$\sqrt{4}$ $\quad$ $\sqrt{6{,}25}$ $\quad$ $\sqrt{8}$

2 $\quad$ $2{,}5$ $\quad$ $2\sqrt{2}$

$2 \in [2; 2{,}5]$

$2\sqrt{2} \notin [2; 2{,}5]$

Ответ: а) $2\sqrt{2}$; 2
б) 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом $60°$ при вершине A. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M — середина ребра A_1B_1.

б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $B_1K : KC_1 = 1 : 3$.

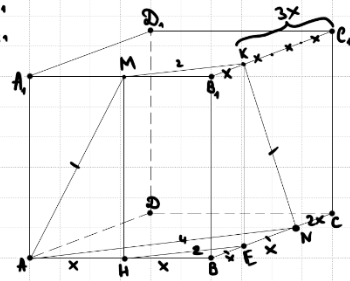
ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

а) ① Построим $MH \parallel AA_1$
$KE \parallel AA_1$

Получаем, что $MKEH$ - ~~прям~~...

Тогда $HE = 2 = MK$



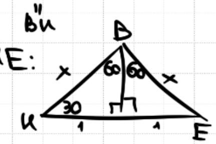
② $\triangle ABN$:
$HE \parallel AN$
(т.к. $HE \parallel MK$
$MK \parallel AN$ т.к. это трап.)
$HE = \frac{1}{2} AN$
Тогда HE - ср. лин.
H - сер. AB
M - сер. A_1B_1 ■

б) ① $V_{пр} = 16 = S_{осн} \cdot h$
Найдём $S_{осн}$

② Пусть $B_1K = x = BE$
Тогда $C_1K = 3x$
$B_1C_1 = 4x = BC$
$BE = x = EN$
(т.к. E - сер BN)
$CN = 2x$

③ $\triangle KEN = \triangle AMH$ по 2м катетам
значит $AH = x = EN$ (...)
$\overset{\shortparallel}{BH}$

④ $\triangle BHE$:



по т. cos:
$2^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$
$x^2 = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$S_{осн} = AB \cdot BC \cdot \sin 60$
$= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$V = S_{осн} \cdot h$
$16 = \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot h$
$h = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ	2

имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^2 - \log_5 x^2}{\log_{15}^2(2x^2 - 6x + 4,5) + 1} \geq 0.$$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1	$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Заметим, что $\log_{15}^2(2x^2-6x+4,5) + 1 > 0$ при $2x^2-6x+4,5 > 0 \quad |\cdot 2$

$4x^2 - 12x + 9 > 0$

$(2x-3)^2 > 0$

$2x - 3 \neq 0$

$x \neq 1,5$

Получаем: $\begin{cases} \log_3 x^2 - \log_5 x^2 \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_3 x^2 - \dfrac{\log_3 x^2}{\log_3 5} \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases} \quad \Big| \cdot \log_3 5$

$\begin{cases} \log_3 x^2 \cdot \log_3 5 - \log_3 x^2 \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$

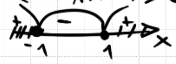
$\begin{cases} \log_3 x^2 \cdot (\log_3 5 - 1) \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases} \quad \Big| : (\log_3 5 - 1)$

$\begin{cases} \log_3 x^2 \geq \log_3 1 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$

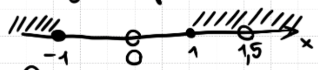
$\begin{cases} ① \; x^2 \geq 1 \\ ② \; x^2 > 0 \\ ③ \; x \neq 1,5 \end{cases}$

① $x^2 - 1 \geq 0$ ② $x \neq 0$ ③ $x \neq 1,5$

$(x-1)(x+1) \geq 0$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

78FF6F

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Материалы для экспертов ЕГЭ

$\cdot 1{,}25$

Пусть n – срок кредита
март – месяц платежа

Дата	Сумма долга	
и	28 млн	
1 год я	$28 \cdot 1{,}25 = 35$	
м		$\Rightarrow$ была выплата $7 + \frac{28}{n} = 9$ (наиб. платёж)
и	$28 - \frac{28}{n}$	
2 год я	$35 - \frac{35}{n}$	
м		$\Rightarrow$ б.в. $7 + \frac{21}{n}$
и	$28 - 2\frac{28}{n}$	
3 год я	$35 - \frac{70}{n}$	
м		$\Rightarrow$ б.в. $7 + \frac{14}{n}$
и	$28 - 3 \cdot \frac{28}{n}$	
…		
$n-1$ и	$\frac{28}{n}$	
n год я	$\frac{35}{n}$	
м		$\Rightarrow$ б.в. $\frac{35}{n} = 2{,}5$
и	0	

$$7 + \frac{28}{n} = 9$$

$$\frac{28}{n} = 2$$

$n = 14$ лет

О.С.В. – ?

Выплаты обр. арифм. прогр.
Воспользуемся ф-лой:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{О.С.В.} = \frac{9 + 2{,}5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{14}^{7} = 80{,}5 \text{ млн}$$

Ответ: 80,5 млн.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

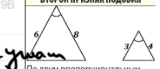
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение $BH : ED$, если $\angle BCD = 120^\circ$.

BD119B

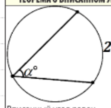
ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2024
Основная волна 2016
Сергеев 2018
Ященко 2018

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



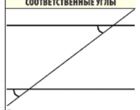
По двум пропорциональным сторонам и углу между ними

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



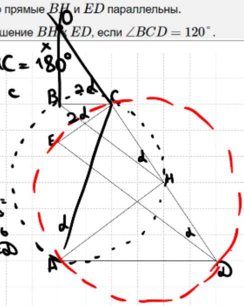
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ



Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

а) ① $\angle ABC + \angle AHC = 180^\circ$
Опишем окр-ть с диаметром AC около $ABCH$



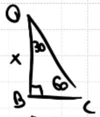
② $\angle EAD + \angle ECD = 180^\circ$
Опишем окр-ть с диаметром ED около $ECDA$

③ Пусть $\angle BHC = \alpha$
$\smile BC = 2\alpha$
$\angle BAC = \alpha$ по т. о вписанном угле
$\smile EC = 2\alpha$
$\angle EDC = \alpha$
$\angle BHC = \angle EDC = \alpha$ (соотв.)
$BH \parallel ED$ ■

б) Пусть $AB \cap CD = O$
$\triangle OBH \sim \triangle OED$ по 2 углам (…)

$$k = \frac{BH}{ED} = \frac{OB}{OE}$$

① $\triangle OBC$:



$\angle OCB = 180 - \angle BCD = 60$
$\sin 60^\circ = \frac{x}{OC}$
$OC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x$
$\angle BOC = 180 - 90 - 60 = 30^\circ$

② $\triangle OEC$:

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OC}{OE}$ $OE = \frac{4}{3}x$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{x}{\frac{4}{3}x} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 32

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2016

6A67D7

$$\begin{cases} ① \ x^2+ax+1\geq 0 \\ ② \ 3x^2+2ax+1=(x^2+(ax+1))^2 \end{cases}$$

Решим ур-е ②:

$$3x^2+2ax+1=x^4+2x^2\cdot(ax+1)+(ax+1)^2$$
$$3x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}=x^4+2a\cdot x^3+2x^2+a^2\cdot x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}$$
$$x^4+2\cdot a\cdot x^3-x^2+a^2\cdot x^2=0$$
$$x^2\cdot(x^2+2ax-1+a^2)=0$$
$$x^2\cdot((x^2+2ax+a^2)-1)=0$$
$$x^2\cdot((x+a)^2-1)=0$$
$$x^2\cdot(x+a-1)(x+a+1)=0$$
$$x=0 \qquad x=1-a \qquad x=-1-a$$

Чтобы все три корня были различны, нужно:

$$\begin{cases} 1-a\neq 0 \\ -1-a\neq 0 \\ 1-a\neq -1-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -1 \\ 0\cdot a\neq 2 \end{cases}$$

$$a\neq \pm 1$$

Найдём при каких a найденные три корня удовл. ①:

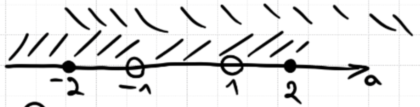
$x=0$
$$a^2+a\cdot 0+1\geq 0$$
a – любое

$x=1-a$
$$(1-a)^2+a\cdot(1-a)+1\geq 0$$
$$1-2a+\cancel{a^2}+a-\cancel{a^2}+1\geq 0$$
$$a\leq 2$$

$x=-1-a$
$$(-1-a)^2+a\cdot(-1-a)+1\geq 0$$
$$1+2a+\cancel{a^2}-a-\cancel{a^2}+1\geq 0$$
$$a\geq -2$$

Получаем:

$$\begin{cases} a\neq \pm 1 \\ a\leq 2 \\ a\geq -2 \end{cases}$$



Ответ: $[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 32

19 а) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + mx + n$ равен 33?
б) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + mx + n$ равен 26?
в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трёхчлена $x^2 + (5m + n)x + (8n + m)$, если известно, что числа m, n и D — натуральные?

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2020

а) $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n = 33$
$m^2 = 33 + 4 \cdot n$
При $n = 4$
$m = 7$
$49 = 49$
Ответ: а) да, 4 и 7.

б) $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n = 26$
$m^2 = 26 + 4 \cdot n$
Заметим, что правая часть ур-я кратна 2, значит m должно быть чётным.
НО если m — чётное, то m^2 кратно 4, НО правая часть ур-я кратна 2, а не 4
Ответ: б) нет.

$x^2 + mx + n$ равен 26?
в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трёхчлена $x^2 + (5m + n)x + (8n + m)$, если известно, что числа m, n и D — натуральные?

в) ① $D = (5m + n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8n + m) =$
$= 25m^2 + 10mn + n^2 - 32n - 4m =$
$= (5m)^2 + 2 \cdot 5m \cdot n + (n^2 - 32n + 256) - 256 - 4m =$
$= (5m)^2 + 2 \cdot 5m \cdot (n - 16) + (n - 16)^2 + 160m - 256 - 4m =$
$= (5m + (n - 16))^2 + 156m - 256$

Если $m = 1$, то $D = (n - 11)^2 - 100$
$D = (n - 11)^2 - 10^2$
$D = (n - 11 - 10)(n - 11 + 10)$
$D = (n - 21)(n - 1)$

Мы ищем наименьшее возможное натур. значение D

Если $n = 1$, $n = 21$, то $D = 0$ (не подходит)
Если $n < 1$, то это нельзя по усл., т.к. n - натур.
$1 < n < 21$, то $D < 0$ (не подходит)
Если $n = 22$, то $D = 21$
$n = 23$ $D = 44$
$n > 23$ $D > 44$
$\Rightarrow D \geq 21$ при $m = 1$

Если $m \geq 2$, то $D \geq 56$
$\Rightarrow D \geq 21$

② Покажем, что $D = 21$ мог быть:
$m = 1$
$n = 22$
$x^2 + (5 \cdot 1 + 22)x + (8 \cdot 22 + 1)$
$x^2 + 27x + 177$
$D = 729 - 4 \cdot 177 = 21$ ✓
Ответ: в) 21

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4