Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

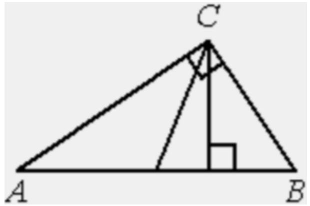
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

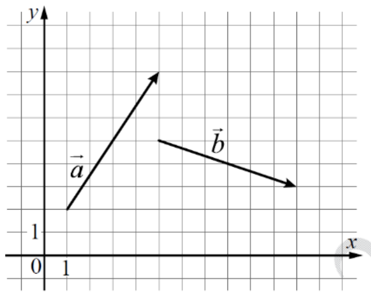
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Острые углы прямоугольного треугольника равны 84° и 6°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



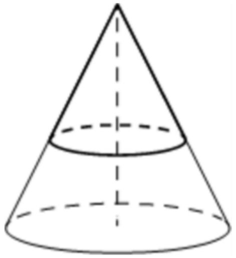
Ответ: ____________________________.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



Ответ: ____________________________.

3 Площадь полной поверхности конуса равна 35. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 3:2, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



Ответ: ____________________________.

4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: ____________________________.

5 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\log_{81} 3^{2x-6} = 2.$

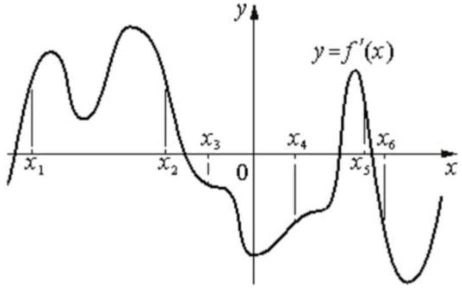
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$(\sqrt{13} - \sqrt{7})(\sqrt{13} + \sqrt{7}).$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ____________________________.

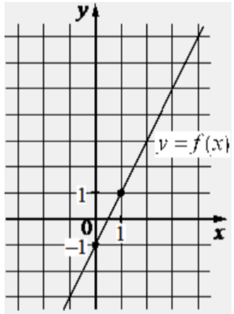
9 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 192$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (в м/с) по закону $f(v) = \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________________________.

10 Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(7)$.



Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 18x^2 - x^3 + 19$ на отрезке $[-7; 10]$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

15 Решите неравенство

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3.$$

16 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

17 Боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания BC. На боковых сторонах AB и AC отложены отрезки AP и CQ соответственно, равные четверти этих сторон.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, делится прямой PQ в отношении 1:3.
б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $BC = 4\sqrt{19}$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

19 Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	78	
2	12	
3	12,6	
4	0,08	
5	0,069	
6	7	
7	6	
8	3	
9	12	
10	10	
11	13	
12	19	
13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n; n \in Z$ б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}$	
14	$\frac{11\sqrt{3}}{2}$	
15	$(-\infty; -1-\log_3 5] \cup [1; +\infty)$	
16	3 млн	
17	3	
18	$\left[\frac{7}{2}; \frac{25}{7}\right)$	
19	а) да б) нет в) 1430	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение $8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

617B18

а) $8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{1-2\sin^2 x} - 63 = 0$

$\frac{8 \cdot (4^2)^{\sin^2 x}}{1} - \frac{2 \cdot 4}{4^{2\sin^2 x}} - \frac{63}{1} = 0$

$\frac{8 \cdot (4^{2\sin^2 x})^2 - 63 \cdot 4^{2\sin^2 x} - 8}{4^{2\sin^2 x}} = 0$

$8(4^{2\sin^2 x})^2 - 63 \cdot 4^{2\sin^2 x} - 8 = 0$

Пусть $4^{2\sin^2 x} = t$

$8t^2 - 63t - 8 = 0$

$D = (-63)^2 + 4 \cdot 8 \cdot 8 = 4225 = 65^2$

$t = \frac{63 \pm 65}{16}$

$t = 8$ $\qquad$ $t = -\frac{1}{8}$

$4^{2\sin^2 x} = 8$ $\qquad$ $4^{2\sin^2 x} = -\frac{1}{8}$

$(2^2)^{2\sin^2 x} = 2^3$ $\qquad$ нет решений

$2^{4\sin^2 x} = 2^3$

$4\sin^2 x = 3$

$\sin^2 x = \frac{3}{4}$

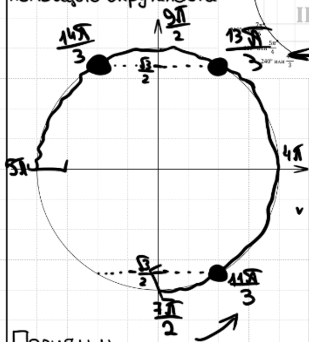
$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}$.

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = \frac{4\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

$x = \frac{4\pi}{1} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 33

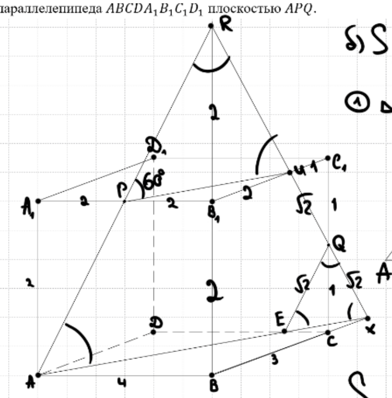
14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2:1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

ИСТОЧНИКИ
Сергеев 2018
Основная волна 2016

а) Пусть ① Построим сеч.:
$AP \cap BB_1 = R$
$RQ \cap B_1C_1 = U$
$RQ \cap BC = X$
$AX \cap CD = E$
$APUQE$ — сечение



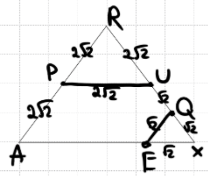
② $\triangle ABR$:
PB_1 — ср. линия
т.к. $PB_1 = \frac{1}{2}AB$
$PB_1 \parallel AB$
значит $B_1R = 2 = BB_1$

③ $\triangle RB_1U \sim \triangle C_1QU$ по 2 углам (верт., 90°)

$\frac{B_1U}{C_1U} = \frac{2}{1}$ ■

б) S_{APUQE} — ?

① $\triangle ARX$:



$S_{EQX} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ARX} = \frac{\sqrt{3}\cdot(4\sqrt{2})^2}{4} = 8\sqrt{3}$

$S_{PRU} = \frac{\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{2})^2}{4} = 2\sqrt{3}$.

$S_{сеч.} = 5{,}5\sqrt{3}$.

Ответ: $5{,}5\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство
$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3$.

ИСТОЧНИКИ
Досрочная волна (Резерв) 2018

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ	
	$a^{\log_a b} = b$
СТЕПЕНИ	
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b + \log_a c = \log_a (b\cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
ФСУ	
1	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$3^{x^2} \cdot 3^{\log_3 5^{x-1}} \geq 3^1$

$3^{x^2 + \log_3 5^{x-1}} \geq 3^1$

$x^2 + \log_3 5^{x-1} \geq 1$

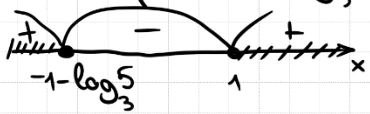
$x^2 + (x-1)\cdot\log_3 5 - 1 \geq 0$

$x^2 + x\cdot\log_3 5 - \log_3 5 - 1 \geq 0$

$x^2 - 1^2 + x\cdot\log_3 5 - \log_3 5 \geq 0$

$(x-1)(x+1) + \log_3 5\cdot(x-1) \geq 0$

$(x-1)\cdot\left(x+1+\log_3 5\right) \geq 0$



Ответ: $(-\infty; -1-\log_3 5] \cup [1; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 33

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 33

16 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

1F03D1

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2022 (14 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
СтатГрад 07.02.2018
СтатГрад 20.12.2016

Пусть S – сумма долга
x – платёж в 4 год, а также в 5 год

Янв 21 – месяц открытия кредита
Июль – месяц начисл. %
Дек – месяц платежа

Дата	Сумма долга	
Я 21	S	
И 21	$1{,}2\cdot S$	
Д 21		⇒ Была выпл. $0{,}2S$
Я 22	S	
И 22	$1{,}2\cdot S$	
Д 22		⇒ б.в. $0{,}2S$
Я 23	S	
И 23	$1{,}2S$	
Д 23		⇒ б.в. $0{,}2\cdot S$
Я 24	S	
И 24	$1{,}2\cdot S$	
Д 24		б.в. x
Я 25	$1{,}2\cdot S-x$	
И 25	$1{,}2^2\cdot S-1{,}2x$	
Д 25		б.в. x
Я 26		

$$\begin{cases}1{,}2^2\cdot S-1{,}2x-x=0\\ 3\cdot 0{,}2\cdot S+2\cdot x<7\end{cases}$$

① $1{,}2^2\cdot S=1{,}2x+x$

$\frac{6^2}{5^2}\cdot S=\frac{6x}{5}+\frac{x}{1}$

$\frac{6^2}{5^2}\cdot S=\frac{11}{5}\cdot x$

$x=\frac{6^2\cdot S\cdot \cancel{5}}{5^{\cancel{2}}\cdot 11}=\frac{36}{55}\cdot S$

Подставим в ②

$3\cdot\frac{S}{5}^{(11}+2\cdot\frac{36}{55}\cdot S<7$

$\frac{33\cdot S}{55}+\frac{72\cdot S}{55}<7$

$\frac{105}{55}\cdot S<7 \quad \Big|:\frac{105}{55}$

$S<\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{55}^{11}}{\cancel{105}_{\cancel{21}\,3}}$

$S<\frac{11}{3}$

$S<3\frac{2}{3}$

$S_{\text{наиб.цел.}}=3$ млн.

Ответ: 3 млн.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 Боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания BC. На боковых сторонах AB и AC отложены отрезки AP и CQ соответственно, равные четверти этих сторон.

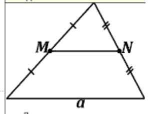
а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, делится прямой PQ в отношении 1:3.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $BC=4\sqrt{19}$.

ИСТОЧНИКИ

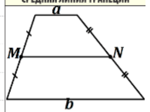
Основная волна 2018

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



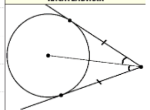
- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ



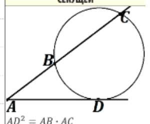
- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основаниям
- Равна полусумме оснований

СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ТЕОРЕМА О КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ



$AD^2=AB\cdot AC$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

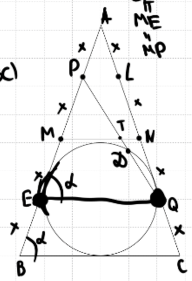
а) Пусть $AP=x=CQ=AL=LN=NQ=BE=ME=MP$

MN – ср. линия

Тогда $BC=2x$

$MN=\frac{1}{2}BC=x$

(т.к. MN – ср. лин. $\triangle ABC$)



② EQ – ср. линия трап. $BMNC$

$EQ=\frac{x+2x}{2}=1{,}5x$

MT – ср. линия $\triangle PEQ$

$MT=\frac{1}{2}\cdot EQ=0{,}75x$

$TN=MN-MT=0{,}25x$

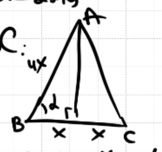
Получаем $\frac{TN}{MT}=\frac{0{,}25x}{0{,}75x}=\frac{1}{3}$ ∎

б) DQ – ?

$BC=4\sqrt{19}=2x$

$x=2\sqrt{19}$

① $\triangle ABC$:



$\cos\alpha=\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$

$\cos\angle ABC=\cos\angle PEQ=\frac{1}{4}$ (соотв.)

② $\triangle PEQ$:

по т. cos:

$PQ=\sqrt{PE^2+EQ^2-2\cdot PE\cdot EQ\cos\alpha}$

$=\sqrt{16\cdot19+9\cdot19-2\cdot12\cdot19\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{19^2}=19$

③ по т. о кас. и сек.:

$PE^2=PD\cdot PQ$

$16\cdot19=PD\cdot19$

$PD=16$

$DQ=19-16=3$

Ответ: 3

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2012

ОДЗ: $1-2x \geq 0$
$x \leq \frac{1}{2}$

Решим графически: $\sqrt{1-2x} + 7|x| = a$

Пусть $f(x) = \sqrt{1-2x} + 7|x|$

Если $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, то $f(x) = \sqrt{1-2x} + 7x$

$f'(x) = \frac{1\cdot(-\cancel{2})}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}} + 7 = 0$

$\frac{-1}{\sqrt{1-2x}} + \frac{7}{1} = 0$

$\frac{7\sqrt{1-2x} - 1}{\sqrt{1-2x}} = 0$

$7\sqrt{1-2x} = 1$

$\sqrt{1-2x} = \frac{1}{7}$

$1-2x = \frac{1}{49}$

$x = \frac{24}{49}$

Если $x < 0$, то $f(x) = \sqrt{1-2x} - 7x$

$f'(x) = \frac{1\cdot(-\cancel{2})}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}} - \frac{7}{1} = 0$

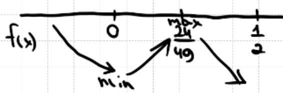
$\frac{-1 - 7\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}} < 0$

$f(x)$ убывает при $x < 0$

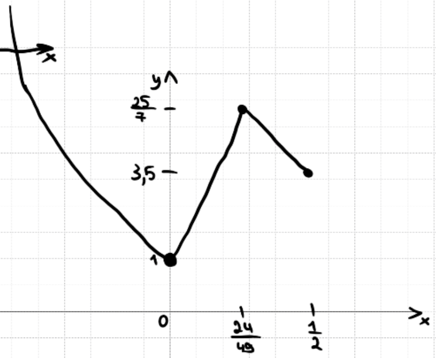
$f\left(\frac{24}{49}\right) = \frac{25}{7}$

x	0	$\frac{24}{49}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	1	$\frac{25}{7}$	$3{,}5$

Получаем



Построим эскиз $f(x)$



при $a < 1$ — 0 реш
$a = 1$ — 1 реш.
$1 < a < 3{,}5$ — 2 реш
$a = 3{,}5$ — 3 реш
$3{,}5 < a < \frac{25}{7}$ — 3 реш
$a = \frac{25}{7}$ — 2
$a > \frac{25}{7}$ — 1 реш.

Ответ: $\left[3{,}5; \frac{25}{7}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 33

19 Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

а)

	1	2	3	4	5	6	7
Маша	m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	$m+4$	$m+5$	$m+6$
Наташа	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$n+6$

$7n+21-(7m+21)=1001$

$7n-7m=1001 \quad |:7$

$n-m=143$

Ответ: а) да, например, если $n=144$, $m=1$

б) Получаем ур-е.

$8n+\cancel{28}-8m-\cancel{28}=1001 \quad |:8$

$n-m=\frac{1001}{8}$

Значит $n-m$ – нецелое, что противоречит условию.

Ответ: б) нет.

в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

$n-m=143$

Ответ: а) да, например, если Маша сделала 1 фото в первый день, а Наташа 144 фото в первый день.

ОТВЕТ:	а) да
	б) нет
	в) 1430

в) ① Пусть k – кол-во дней, когда они фоткались. Получаем уравнение:

$k\cdot n-k\cdot m=1001$

$k\cdot(n-m)=1001$

$\Rightarrow 1001$ должно делиться на k без остатка

② $(m+k-1)$ – это кол-во Машиных фото в последний k-й день

$m+k-1<40$

$m+k<41$

Учитывая, что $m\geqslant 1$, получаем $k<40$, т.е. $k\leqslant 39$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
$a_n=a_1+d\cdot(n-1)$
$S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$
$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$

③ Т.к. k – это делитель 1001 и $k\leqslant 39$, то получаем, что:

$k=7$
Тогда
$m+7<41$
$m<34$
$m\leqslant 33$
Тогда
Наибольшее общее кол-во фото Маши $=\frac{33+33+6}{2}\cdot 7=36\cdot 7=252$
Тогда
Наибольшее общее кол-во фото Наташи $=252+1001=1253$

Или $k=11$
Тогда
$m+11<41$
$m<30$
$m\leqslant 29$
Тогда
Н. об. к. ф. М $=\frac{29+29+10}{2}\cdot 11=374$
Тогда
Н. об. к. ф. Н. $=374+1001=1375$

Или $k=13$
Тогда
$m+13<41$
$m<28$
$m\leqslant 27$
Тогда
Н. об. к. ф. м. $=\frac{27+27+12}{2}\cdot 13=429$
Тогда
Н. об. к. ф. Н. $=429+1001=1430$

Ответ: в) 1430.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2
ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 33