



4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ: _____.

5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения

$$3^{\log_2(2x-9)} = 3.$$

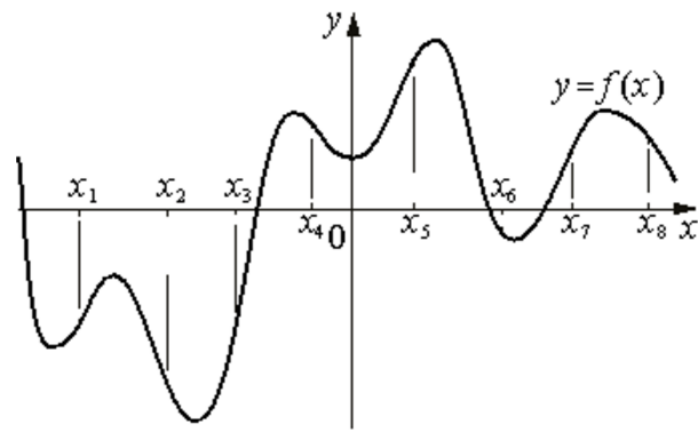
Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{21(\sin^2 66^\circ - \cos^2 66^\circ)}{\cos 132^\circ}.$$

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: _____.

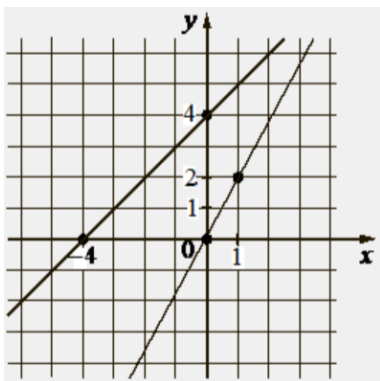
9 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускорено наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, прошедшее после начала работы лебёдки, $\omega = 50$ град./мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4$ град./мин² — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Определите время, прошедшее после начала работы лебёдки, если известно, что за это время угол намотки φ достиг 2500° . Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

10 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 775 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 61 час. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики двух линейных функций, пересекающиеся в точке A . Найдите абсциссу точки A .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 69 \cos x + 71x + 48 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + 1 = 0.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра CC_1 . На рёбрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK:KB = B_1N:NA_1$.

- а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1 .
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN , если $AB = BB_1 = 42$ и $BK:KA = 41:1$.

- 15 Решите неравенство

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0.$$

- 16 Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.

Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?



17 Дан треугольник ABC . Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC , при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC .

- а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

- а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	3	
2	-0,96	
3	6	
4	0,5	
5	2	
6	18	
7	-21	
8	4	
9	25	
10	3	
11	4	
12	117	
13	а) $\pi + 2\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{11\pi}{3}; -3\pi$	
14	$638\sqrt{3}$	
15	$(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$	
16	700000	
17	$\frac{\sqrt{1443}}{21}$	
18	$(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$	
19	а) нет б) нет в) 11,75	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

$$а) \cos x - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} \cdot (2\cos \frac{x}{2} - \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | :2$$

$$\frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Ответём корни с помощью пер-ва.

Для $x = \pi + 2\pi n$

$$-4\pi \leq \pi + 2\pi n \leq -\frac{5\pi}{2} \quad | : \pi$$

$$-4 \leq 1 + 2n \leq -\frac{5}{2} \quad | -1$$

$$-5 \leq 2n \leq -3,5 \quad | :2$$

$$-2,5 \leq n \leq -1,75 \quad n \in \mathbb{Z}$$

Если $n = -2$, то $x = \pi + 2\pi(-2) = -3\pi$

Для $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{3} + 4\pi n \leq -\frac{5\pi}{2} \quad | : \pi$$

$$-4 \leq \frac{1}{3} + 4n \leq -\frac{5}{2} \quad | -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{13}{3} \leq 4n \leq -\frac{17}{6} \quad | :4$$

$$-\frac{13}{12} \leq n \leq -\frac{17}{24} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$

Для $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi n$

$$-4\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 4\pi n \leq -\frac{5\pi}{2} \quad | : \pi$$

$$-4 \leq -\frac{1}{3} + 4n \leq -\frac{5}{2} \quad | + \frac{1}{3}$$

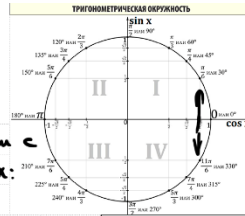
$$-\frac{11}{3} \leq 4n \leq -\frac{13}{6} \quad | :4$$

$$-\frac{11}{12} \leq n \leq -\frac{13}{24} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Целых n на этом отрезке нет

Ответ: а) $\pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{3}; -3\pi$



ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2014

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобке сколько-то π , то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Определим знак по указанной в скобках четверти (смотреть на начальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

то IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

3 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

4 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2



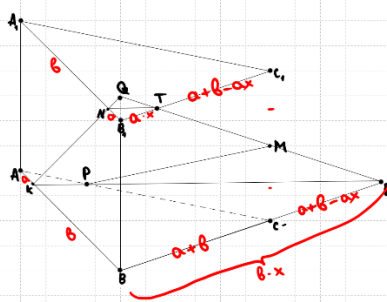


14 В правильной треугольной призме $ABC_1A_1B_1C_1$, точка M – середина ребра CC_1 . На ребрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK:KB = B_1N:NA_1$.

ИСТОЧНИКИ
Основная школа (Решер) 2022

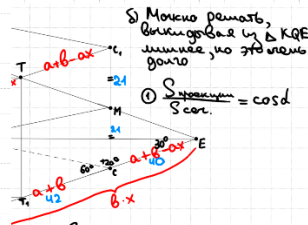
- а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1 .
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN , если $AB = BB_1 = 42$ и $BK:KA = 41:1$.

а) Пусть $KM \cap BB_1 = Q$
 $QM \perp BC_1 = T$
 $QM \perp BC = E$
 $KE \perp AC = P$
 $KPMTN$ – сеч.



б) Пусть $AK = a$
 $BK = b$
 Тогда $AB = a+b$
 $B_1N = a$
 $A_1N = b$

в) $\triangle QB_1N \sim \triangle QBK$ по 2 углам
 $\triangle QBT \sim \triangle QBE$ по 2 углам
 $\frac{BT}{BE} = \frac{QB_1}{QB} = \frac{B_1N}{BK} = \frac{a}{b}$
 Тогда $B_1T = a \cdot x$
 $BE = b \cdot x$
 $C_1T = a+b-ax$



5) Можно заметить, что величина угла $\angle KQE$ меньше, но это не имеет значения

1) $S_{сеч.} = \cos d$

г) $\triangle C_1TM \sim \triangle CME$ по углу
 $CE = a+b-ax = C_1T$

д) $BE = b \cdot x = a+b-ax$
 $b \cdot x + ax = a+b-ax$
 $x(a+b) - 2(a+b) = 0$
 $(a+b)(x-2) = 0$
 $x = 2$ $a = b$
 $BE = 2b$ нетреш.

$\frac{S_{KPMTN}}{S_{KBE}} = \cos d$, где d – это угол между плоскостями (MKN) и (ABE)
 d – линейный угол двугранного угла

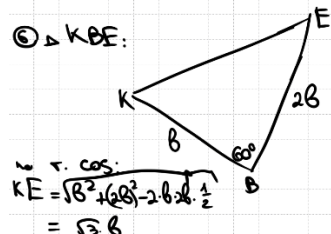
в) $S_{KBE} = \frac{BK \cdot KE}{2} = \frac{41 \cdot 41\sqrt{3}}{2}$
 $KE = \sqrt{82^2 - 41^2} = \sqrt{4^2 \cdot 4^2 - 4^2} = 41\sqrt{3}$

г) $\triangle AKP$:
 $PE = 41\sqrt{3} - \sqrt{3} = 40\sqrt{3}$
 $S_{KPE} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot CE \cdot \sin 30^\circ = 10\sqrt{3} \cdot 40$

д) $S_{B_1N, T_1} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

а.х
 в) $\cos d = \frac{KN_1}{KN} = \frac{40}{58}$
 $KN = \sqrt{40^2 + 41^2} = \sqrt{2^2 \cdot 20^2 + 2^2 \cdot 41^2} = \sqrt{8 \cdot 41 \cdot 2^2} = 29 \cdot 2 = 58$

г) $S_{сеч.} = S_{KPMTN} : \cos d =$
 $= \left(\frac{41^2 \sqrt{3}}{2} - \frac{400\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{40}{58} =$
 $= \frac{11 \cdot 410\sqrt{3}}{40} = 638\sqrt{3}$



Заметим, что в $\triangle KBE$ вогн. т. Пуч.
 $\angle PKB = 90^\circ$
 $PK \perp AB$
 $PK \perp AA_1$
 $PK \perp (AA_1B_1)$
 $(MKN) \perp (AA_1B_1)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



15 Решите неравенство
 $27 \cdot 45^x - 27 \cdot 27^x - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$.

$$27 \cdot 45^x - 27 \cdot 27^x - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$$

$$27 \cdot 9^x \cdot (5^x - 3^x) - 12 \cdot 3^x \cdot (5^x - 3^x) + (5^x - 3^x) \leq 0$$

$$(5^x - 3^x) \cdot (27 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^x + 1) \leq 0$$

$$(5^x - 3^x) \cdot 27 \cdot (3^x - \frac{1}{9}) \cdot (3^x - \frac{1}{3}) \leq 0 \quad | : 3^x$$

$$(\frac{5}{3})^x - (\frac{5}{3}) \cdot (3^x - 3^{-2}) \cdot (3^x - 3^{-1}) \leq 0$$

$$(\frac{5}{3} - 1)(x - 0) \cdot (3 - 1) \cdot (x + 2) \cdot (3 - 1) \cdot (x + 1) \leq 0$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$.

ИСТОЧНИКИ

ГПН (старый банк)
 ГПН (новый банк)
 Основная школа (Резерв) 2020

СТЕПЕНИ

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ
 $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

16 Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.
 Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.
 За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.
 Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

	часы	единица товара
I з.	x^2	x
II з.	y^2	y

② Сумма денег на оплату труда рабочих
 $= 500 \cdot x^2 + 200 \cdot y^2$

Найдём наименьшее значение этой суммы.

$$f(x) = 500x^2 + 200 \cdot (70-x)^2$$

$$= 500x^2 + 200 \cdot (70^2 - 140x + x^2)$$

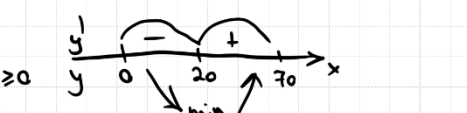
$$= 500x^2 + 200 \cdot 70^2 - 28000x + 200x^2$$

$$= 700x^2 - 28000x + 200 \cdot 70^2$$

① $70 = x + y$
 Выразим $y = 70 - x$
 где $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = 1400x - 28000 = 0$$

$$x = 20$$



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 70 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 70 \end{cases}$$

$x \in [0; 70]$

$$f(20) = 500 \cdot 20^2 + 200 \cdot 50^2 = 200000 + 500000 = 700000 \text{ р.}$$

Ответ: 700 000 р.

ИСТОЧНИКИ

Основная школа (Резерв) 2017

ПРОИЗВОДНЫЕ

- $c' = 0$
- $x' = 1$
- $(cx)^n = c \cdot n \cdot x^{n-1}$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(U \cdot V)' = U'V + UV'$
- $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
- $(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



17 Дан треугольник ABC . Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC , при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC .
 а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
 б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.

а) по т. кос:
 $\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - 37}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$
 $\angle A = 120^\circ$
 $\angle D = 60^\circ$
 (т.к. $\triangle BDC$ - \triangle по усл.)
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$
 Значит около $ABDC$ можно опис. окр.

б) \odot Окружность, описанная $ABDC$ описывает и $\triangle BDC$ значит центр этой опис. окр-ти - точка на высоте $\triangle BDC$
 Пусть DK - высота $\triangle BDC$
 $EK = \frac{1}{3} DK$
 $AD \perp BC = K$
 EK - иском. расстояние.

② $BD = CD$
 $\angle BAK = \angle CAK$ (симп. ка равност. \triangle)
 AK - бисс.
 по т. о бисс B $\triangle ABC$:
 $\frac{4}{3} = \frac{BK}{CK}$ $BK = \frac{4}{7} \cdot BC = \frac{4\sqrt{37}}{7}$
 $CK = \frac{1}{7} \cdot BC = \frac{\sqrt{37}}{7}$
 $DK = \frac{4}{7} \sqrt{37} - \frac{1}{7} \sqrt{37} = \frac{3\sqrt{37}}{7}$
 $EK = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{37}}{7} = \frac{\sqrt{37}}{7}$

по т. Пиф.
 $KF^2 = \frac{37}{14^2} + \frac{3 \cdot 37}{36}$
 $KF^2 = \frac{624 \cdot 37}{196 \cdot 36} = \frac{39 \cdot 16 \cdot 37}{196 \cdot 36}$
 $KF = \frac{\sqrt{481}}{7\sqrt{3}}$

ИСТОЧНИКИ
 Основная волна (Резерв) 2023
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
СВОЙСТВО ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁУГОЛЬНИКА
 $\angle A + \angle C = 180^\circ$
 $\angle B + \angle D = 180^\circ$
ВЫСОТА РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА
 $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$
РАДИУС ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
 $r = \frac{1}{3}h$
ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ
 Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ
 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА
 $c^2 = a^2 + b^2$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$9x^2 - a^2 = x^2 + 8x + 16 - a^2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$$\begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a) = 0 \\ (x+4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-a=0 \\ 3x+a=0 \\ (x+4-a)(x+4+a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \\ x \neq a-4 \\ x \neq -a-4 \end{cases}$$

$$X = \frac{a}{3} \quad x = -\frac{a}{3} \quad \text{даже не быть разн.}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3} \\ \frac{2a}{3} \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

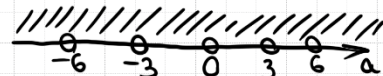
$$X = \frac{a}{3} \quad \text{не должен быть равен } a-4$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} \neq a-4 \\ \frac{2}{3}a \neq 4 \\ \frac{a}{3} \neq -a-4 \\ \frac{4}{3}a \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 6 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

$$X = -\frac{a}{3} \quad \text{не должен быть равен } -a-4$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{3} \neq a-4 \\ -\frac{a}{3} \neq -a-4 \\ \frac{4}{3}a \neq 4 \\ \frac{2}{3}a \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -6 \end{cases}$$

Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

- а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
- б) Можно ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
- в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

а) Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$
 $8 \leq 8 \leq 9 \leq 10 \leq 11 \leq 12 \leq 13 \leq 14 \leq 15 \leq 16 \leq 17 \leq 18$

Среднее семи $\leq \frac{12+13+14+15+16+17+18}{7}$
 наиб.

Среднее семи ≤ 15 т.е. 16 невозможно

Ответ: а) нет.

б) Показем, что $a_6 + a_7 = 56 - 20 = 36$
 $a_6 + a_7 = 112 - 76 = 36$

Значит, что $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 2,5 \cdot (a_6 + a_7)$
 $76 > 2,5 \cdot 36$
 $76 > 90$

Н0 $76 < 90$, т.е. $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ окладнее меньше чем $2,5(a_6 + a_7)$, что невозможно.

а) Пусть S - сумма всех 12-ти чисел
 Тогда $S = 112$
 $a_1 \dots a_3 \dots a_4 \dots a_5 \dots a_6 \dots a_7 \dots a_8 \dots a_9 \dots a_{10} \dots a_{11} \dots a_{12}$
 $7 \cdot 8 = 56 \quad 7 \cdot 16 = 112$

Получаем, что $a_6 + a_7 = S - (S - 112) - (S - 56)$
 $a_6 + a_7 = 168 - S$
 $S = 168 - (a_6 + a_7)$
 S будет наименьшей при наибольшем возможном значении $a_6 + a_7$

б) Найдём $(a_6 + a_7)$ наиб.

$a_7 - a_6 \geq 1 \quad a_8 - a_6 \geq 2$
 $a_9 - a_6 \geq 2 \quad a_{10} - a_6 \geq 3$
 $a_{11} - a_6 \geq 3 \quad a_{12} - a_6 \geq 4$
 $a_{11} - a_6 \geq 4 \quad a_{12} - a_6 \geq 5$
 $a_{11} - a_6 \geq 5 \quad a_{12} - a_6 \geq 6$

$2a_6 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 - 5a_6 - 5a_7 \geq 35$
 $5(a_6 + a_7) \leq 2 \cdot (a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}) - 35$
 $7(a_6 + a_7) \leq 2 \cdot (a_6 + a_7 + a_6 + a_6 + a_{11} + a_{12}) - 35$
 $a_6 + a_7 \leq 27$
 Получаем $S \geq 168 - 27$
 $S \geq 141$
 Получаем $\text{Ср.ар} \geq \frac{141}{12}$
 $\text{Ср.ар} \geq 11,75$

в) Показем, что $\text{Ср.ар} = 11,75$ можно быть
 $S = 141$
 $a_6 + a_7 = 27$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12}$
 $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19$
 $56 - 23 = 28$

Ответ: б) 11,75

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a , b и v	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте v и обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и b ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте v	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

