Ответы и решения для варианта 34072999

1)Установка счетчиков позволяет ежемесячно экономить 800 − 300 = 500 руб. Значит, они окупятся через 3300 : 500 = 6,6 месяца или за 7 полных месяцев.

2)Для того, чтобы крутящий момент был не меньше 120 Н · м число оборотов двигателя в минуту n должно быть не меньше 2000 и не больше 5000 (см. график). Поэтому искомая наименьшая скорость определяется по формуле v = 0,036 · 2000 = 72 км/ч. Ответ: 72.

3)

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен полуразности суммы катетов и гипотенузы. Заметим, что в треугольнике с катетами 3 и 4 гипотенуза равна 5, откуда

$$r = \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

4)

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, *З.* нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых *З.* сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D) = P(C)+P(D)-P(C \cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D)) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D) = P(A)\cdot P(B)\cdot (P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$= 0,6\cdot 0,8\cdot (0,7+0,5-0,7\cdot 0,5) = 0,408.$$

Ответ: 0,408.

5)

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi x}{3}=0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k; \\ \frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+6k; \\ x=\frac{5}{2}+6k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Значениям $k\le -1$ соответствуют отрицательные корни.
Если $k=0$, то $x=0,5$ и $x=2,5$.
Если $k=1$, то $x=6,5$ и $x=8,5$.
Значениям $k\ge 2$ соответствуют большие положительные корни.

Наименьшим положительным решением является 0,5.

Ответ: 0,5.

6)

Треугольник ADC — равнобедренный, значит, угол DAC равен углу ACD, как углы при его основании. Треугольник ADB тоже равнобедренный, значит, угол ADB равен углу ABD, как углы при его основании, причем

$$\angle ADB=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-(180^\circ-2\angle ACD)=2\angle ACD.$$

Тогда

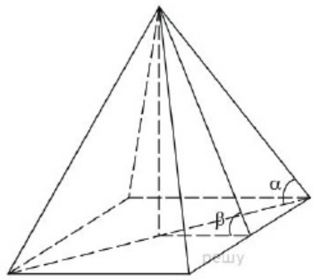
$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD+\angle DAC+\angle ABD+\angle ACD=180^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\angle ACD=180^\circ \Leftrightarrow \angle ACD=36^\circ.$$

Ответ: 36.

7)Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени.
Значение производной равно нулю в точках экстремума функции s(t).
Точек экстремума на графике 6. Ответ: 6.

8)

Введём обозначения углов, как показано на рисунке. Пусть R — длина половины диагонали. В силу связи основных углов в правильной пирамиде:



$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta/\sqrt{2} = \sqrt{7},$$

поэтому

$$a = \sqrt{2}R = \sqrt{2}\cdot l\cos\alpha.$$

Вычислим $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Получаем, что

$$a = \sqrt{2}\cdot l\cos\alpha = \sqrt{2}\cdot 22\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} = 11.$$

Ответ: 11.

9)

Выполним преобразования:

$$x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + \sqrt{(x-2)^2} = x + |x-2|.$$

При $x \le 2$ имеем $|x-2| = 2 - x$. Тогда $x + |x-2| = x + 2 - x = 2$.

Ответ: 2.

10)

Задача сводится к решению уравнения $U_0\sin(\omega t+\varphi)=1$ при заданных значениях амплитуды сигнала, частоты и фазы:

$$2\sin(120^\circ t-30^\circ)=1\Leftrightarrow\sin(120^\circ t-30^\circ)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}120^\circ t-30^\circ=30^\circ+360^\circ n\\120^\circ t-30^\circ=150^\circ+360^\circ n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}120^\circ t=60^\circ+360^\circ n\\120^\circ t=180^\circ+360^\circ n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t=1+6n\\2t=3+6n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\underset{t<1}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2},\\t=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

На протяжении первой секунды лампочка будет гореть $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0,5$ с, то есть $50\ \%$ времени.

Ответ: 50.

11)

Обозначим S км – расстояние от A до C, v км/ч – скорость автомобиля, t ч – время движения мотоциклиста от A до C. Тогда $\left(t+\frac{1}{2}\right)v=90t$ и $\left(2t+\frac{1}{2}\right)v=150$. Решим систему полученных уравнений:

$$\begin{cases}\left(t+\dfrac{1}{2}\right)v=90t,\\\left(2t+\dfrac{1}{2}\right)v=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left(t+\frac{1}{2}\right)v}{\left(2t+\frac{1}{2}\right)v}=\dfrac{90t}{150}\\\left(2t+\dfrac{1}{2}\right)v=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2t+1}{2t+\frac{1}{2}}=\dfrac{6t}{5},\\\left(2t+\dfrac{1}{2}\right)v=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1,\\v=60.\end{cases}$$

Тогда $S=90t=90$ км.

Ответ: 90.

12)

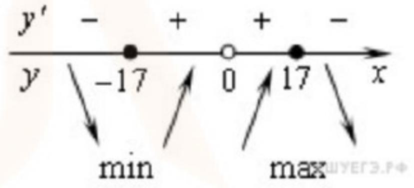
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2+289}{x}\right)' = -\left(x+\frac{289}{x}\right)' = -\left(1-\frac{289}{x^2}\right) = \frac{289-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 = 289 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17, \\ x = -17. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

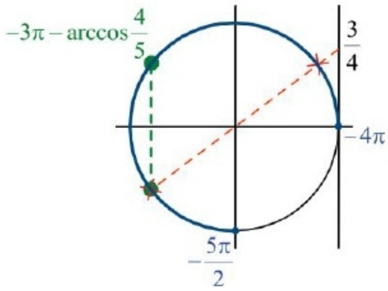


Искомая точка максимума $x = 17$.

Ответ: 17.

13)

а) Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля:



$$\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg} x-3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=-\frac{4}{5}, \\ \operatorname{tg} x \neq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Из уравнения $\cos x=-\frac{4}{5}$ получаем $x=\pm\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

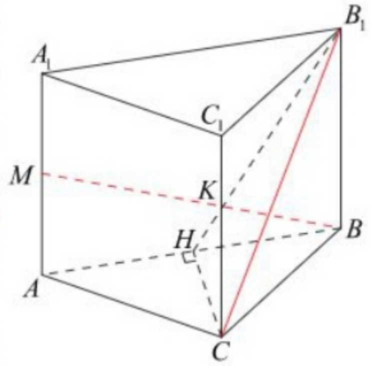
Заметим, что если $\cos x=-\frac{4}{5}$, то $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\pm\frac{3}{5}$, а тогда $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\pm\frac{3}{4}$. Следовательно, условию $\operatorname{tg} x\neq\frac{3}{4}$ не удовлетворяют значения переменной, для которых $\cos x=-\frac{4}{5}$ и $\sin x=-\frac{3}{5}$ одновременно. Поэтому серия $-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+2\pi k$ даёт посторонние корни, а серия $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+2\pi k$ даёт решения заданного уравнения (см. рис.). Тем самым,

$$x=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+2\pi k=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[-4\pi,-\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим $x=-3\pi-\arccos\frac{4}{5}$.

Ответ: а) $\left\{\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-3\pi-\arccos\frac{4}{5}$.

14)



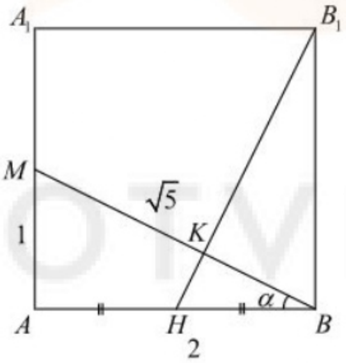
а) Проведем $CH \perp AB$ (см. рис. 1), тогда B_1H — проекция B_1C на плоскость AA_1B_1B. Полученная проекция перпендикулярна прямой BM (*), поэтому в силу теоремы о трёх перпендикулярах, прямые B_1C и BM взаимно перпендикулярны.

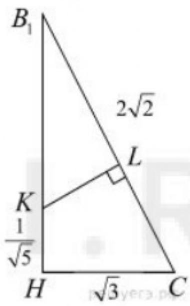
Докажем (*). Заметим (см. рис. 2), что треугольники MAB и HBB_1 равны. Повернём HBB_1 на угол 90° по часовой стрелке и совместим точку B с точкой A. Сторона AM совместится со стороной HB, а сторона AB — со стороной BB_1. Поскольку после поворота на 90° стороны MB и HB_1 совместились, до поворота угол между ними был равен 90°.

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них. Заметим, что $MB \perp B_1H$ и $MB \perp B_1C$ (из п. а), следовательно, $(MB) \perp (B_1HC)$, а тогда K — проекция MB на плоскость B_1HC. Проекцией прямой CB_1 на плоскость B_1HC является сама прямая CB_1. Осталось найти расстояние от K до CB_1.

В треугольнике MAB находим $\sin\alpha = \sin HBM = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда в треугольнике HKB имеем: $HK = HB\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Треугольники B_1HC и B_1LK подобны (см. рис. 3), поэтому $\frac{KL}{HC} = \frac{B_1K}{B_1C} = \frac{B_1H - KH}{B_1C}$, откуда

$$KL = \frac{\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$





Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

15)

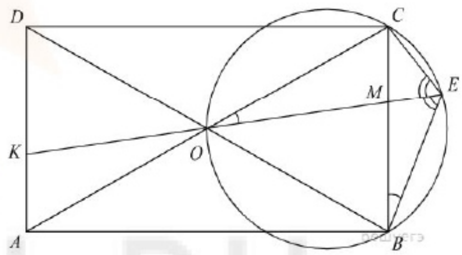
Областью определения неравенства являются положительные числа, отличные от 0,25 и 1. Выражение $\left|\log_x \frac{x}{4}\right|$ либо равно нулю при $x = 4$, при этом неравенство верно; либо положительно, и тогда на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Имеем:

$$\log_{4x}(2x^2) \le 1 \Leftrightarrow \log_{4x}(2x^2) \le \log_{4x}4x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 0,25, \\ (4x-1)(2x^2-4x) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 0,25, \\ (4x-1)(x-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \le 2.$$

Учитывая, что $x \ne 1$, получаем ответ: $\left(\frac{1}{4};\ 1\right) \cup (1;\ 2] \cup \{4\}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\ 1\right) \cup (1;\ 2] \cup \{4\}$.

16)



а) По теореме о внешнем угле треугольника,

$$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Значит, точки B, E, C, O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов,

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25+9+15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Вписанные углы BEO и CEO опираются на равные хорды BO и CO, значит, EO — биссектриса угла BEC. Пусть M — точка её пересечения со стороной BC. По формуле для биссектрисы треугольника получаем:

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cdot \cos\frac{\angle BEC}{2}}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$, значит, $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что

$$MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49.$$

Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.

Ответ: 113.

17)

Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю девочек — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждая девочка в классе из 22 человек составляет $\frac{1}{22}$ от общего числа учащихся в этом классе, а в классе из 23 человек — $\frac{1}{23}$ от общего числа учащихся. Значит, если поменять местами девочку из большего класса и мальчика из меньшего, суммарный процент девочек вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда меньший класс полностью состоит из девочек, а в большем классе — 3 девочки и 20 мальчиков.

Решение 2. Пусть в меньший класс распределено x девочек (где $2 \le x \le 22$), тогда в больший класс попало $(25-x)$ девочек. Значит, суммарная доля девочек в двух классах равна $\frac{x}{22}+\frac{25-x}{23}=\frac{x}{506}+\frac{25}{23}$ и представляет собой линейную функцию с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [2; 22], то есть при $x=22$. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

Ответ: В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков.

18)

Ясно, что при $b=0$ система имеет единственное решение

$$\begin{cases} y=ac^2, \\ x=ac+1, \end{cases}$$

которое выражается через a и c однозначно, то есть существует для любых a и c.

При $b \ne 0$ если умножить второе уравнение на b и из полученного уравнения вычесть первое уравнение системы, получим

$$(b^2-1)y=abc+b-ac^2.$$

Если же умножить на b первое уравнение и из полученного уравнения вычесть второе уравнение системы, то получим

$$(b^2-1)x=abc^2-ac-1.$$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y=ac^2-bx, \\ (b^2-1)x=abc^2-ac-1. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы позволяет получить y по x. Следовательно, система имеет решения тогда и только тогда, когда имеет решения второе уравнение.

Уравнение $(b^2-1)y=abc+b-ac^2$ имеет единственное решение при любом $b \ne \pm 1$. Если $b=-1$ или $b=1$, то уравнение принимает вид $ac^2+ac+1=0$ и $ac^2-ac-1=0$ соответственно. Исходная система будет иметь решения если существуют a и c, удовлетворяющие полученным соотношениям. При $a=0$ они не выполняются ни при каких значениях параметров. При $a \ne 0$ рассмотрим их как квадратные уравнения относительно параметра c. Дискриминанты уравнений должны быть неотрицательны: $a^2-4a \ge 0$ и $a^2+4a \ge 0$. Решая неравенства, находим $a \in (-\infty;\ 0) \cup [4;\ +\infty)$ и $a \in (-\infty;\ -4] \cup (0;\ +\infty)$. Система должна иметь решения для любых значений b, поэтому найденные множества значений параметра a следует пересечь, получаем: $a \in (-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$.

19)

а) Пусть $a = 10,\ b = 20, c = 11$ и $d = 37$. Тогда $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{21}{57} = \dfrac{7}{19}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$. Тогда:

$$11(a+c)bd = (b+d)(ad+bc) \Leftrightarrow 11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd \Leftrightarrow ad(10b-d) = bc(b-10d).$$

С другой стороны имеем: $10b - d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b - 10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ разные знаки и, значит, левая и правая часть в последнем равенстве не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 > a > 3b+1$ и $c \geq 6d+1$. Значит, $b \leq \dfrac{98}{3} < 33$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 32$. Используя неравенства $a \geq 3b+1,\ c \geq 6d+1,\ b \leq 32$ и $d \geq 10$, получаем:

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+6d+2}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 3 + \frac{3d+2}{d+32} = 6 - \frac{94}{d+32} \geq 6 - \frac{94}{42} = \frac{79}{21}.$$

Пусть $a = 97,\ b = 32,\ c = 61$ и $d = 10$. Тогда $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{158}{42} = \dfrac{79}{21}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\dfrac{a+c}{b+d}$ равно $\dfrac{79}{21}$.

Ответ: а) Да, например, если $a = 10,\ b = 20,\ c = 11$ и $d = 37$; б) нет; в) $\dfrac{79}{21}$.