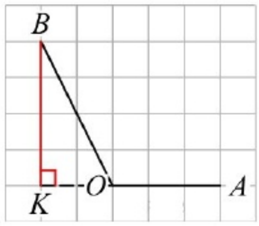
Ответы и решения для варианта 34072998

1)Периметр комнаты равен 2,3 + 4,2 + 2,3 + 4,2 = 13 м. Поскольку 13 : 1,6 = 8,125, для оклейки комнаты необходимо 9 рулонов обоев. Ответ: 9.

2)Чтобы найти среднюю скорость движения точки, необходимо перемещение поделить на время прохождения: 8:5=1,6м/с Ответ: 1,6

3)

Проведем высоту BK из точки B на продолжение стороны OA. Тогда:



$$\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\pi-\angle KOB)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\angle KOB=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{BK}{BO}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{BK}{\sqrt{BK^2+KO^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16+4}}=1.$$

Ответ: 1.

4)

Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A|B_1$ и $A|B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1)+P(AB_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=$$
$$=0,4\cdot P(B_1)+0,2\cdot(1-P(B_1))=0,2P(B_1)+0,2.$$

Поскольку по условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1)=(0,35-0,2):0,2=0,75.$$

5)

Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x}=0,4\cdot 5^{3+x}\Leftrightarrow\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}}=0,4\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{1}\Leftrightarrow 3+x=1\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: −2.

6)

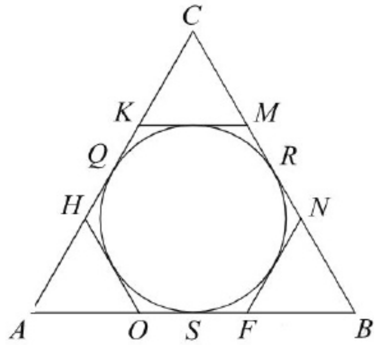
Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M, соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ+CR=P_{CKM},\ AQ+AS=P_{AHO},\ BS+BR=P_{BFN}.$$

Следовательно,

$$P_{ABC}=P_{AOH}+P_{KCM}+P_{FNB}=24.$$

Ответ: 24.



7)

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x+b=-5, \\ 28x^2+bx+15=-5x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5-56x, \\ 28x^2+(-5-56x)x+15=-5x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5-56x, \\ x^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому x = 0,5, откуда b = –33.

8)

Если ребро куба равно a, то его объем и диагональ даются формулами $V=a^3$ и $d=a\sqrt{3}$. Следовательно,

$$d^3=(a\sqrt{3})^3=a^3\cdot 3\sqrt{3}=24\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}=216.$$

Тогда диагональ равна 6.

Ответ: 6.

9)

Подставим аргументы в формулу, задающую функцию:

$$h(5+x)=\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{5+x-10}=\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x-5};$$
$$h(5-x)=\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{5-x-10}=-\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[3]{x+5}.$$

Следовательно, $h(5+x)+h(5-x)=0$.

Ответ: 0.

10)

пусть p_1 и V_1 - начальные, а p_2 и V_2 - конечные значения объема и давления газа, соответственно. Тогда задача сводится к решению неравенства

$$V_2\geq\left(\frac{p_1V_1^{1,4}}{p_2}\right)^{\frac{1}{1,4}}, \text{ где } p_1=1 \text{ атм., } V_1=1,6 \text{ л., } p_2=128 \text{ атм.}$$

Тогда

$$V_2\geq\left(\frac{1,6^{\frac{7}{5}}}{128}\right)^{\frac{5}{7}}\Leftrightarrow V_2\geq\left(2^{-7}\right)^{\frac{5}{7}}\cdot 1,6\Leftrightarrow V_2\geq\frac{1,6}{32}\Leftrightarrow V_2\geq 0,05.$$

Ответ: 0,05.

11)

Условие «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 67%» означает, что зарплата отца составляет 67% дохода семьи. Условие «если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, доход семьи сократился бы на 4%», означает, что 2/3 стипендии составляют 4% дохода семьи, то есть вся стипендия дочери составляет 6% дохода семьи. Таким образом, доход матери составляет $100\%-67\%-6\%=27\%$ дохода семьи.

Ответ: 27.

12)

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2\cos x + (3-2x)\sin x - 2\cos x = (3-2x)\sin x.$$

На заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Поэтому единственный нуль производной — число 1,5.

Определим знаки производной функции: она положительна при $x < 1{,}5$ и отрицательна при $x > 1{,}5$. Поэтому искомая точка максимума — число 1,5.

Ответ: 1,5.

13)

а) Сделаем замену $t = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}$, возведём обе части в квадрат $t^2 = \frac{(x-2)^2}{4} - 3 + \frac{9}{(x-2)^2}$, тогда $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{9}{(x-2)^2} = t^2 + 3$. Имеем:

$$2(t^2+3) = 7t + 10 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2}, \\ t = 4. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Если $t = -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ (x-2)^2 - 6 = -(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Если $t = 4$, то

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ (x-2)^2 - 6 = 8(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 - \sqrt{22}, \\ x = 6 + \sqrt{22}. \end{array}\right.$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $[-2; 2]$. В силу неравенств

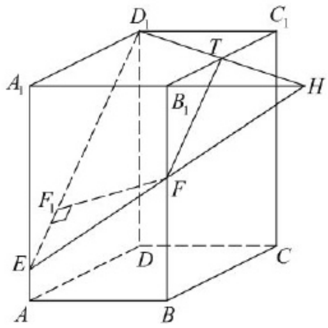
$$0 < 6 - \sqrt{22} < 6 - 4 = 2 \text{ и } 6 + \sqrt{22} > 6 + 4 = 10 > 2,$$

из найденных корней уравнения заданному отрезку принадлежат только числа -1 и $6 - \sqrt{22}$.

Ответ: а) $\left\{-1;\ 4;\ 6-\sqrt{22};\ 6+\sqrt{22}\right\}$; б) $-1;\ 6-\sqrt{22}$.

14)

а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, как треугольники с параллельными сторонами, следовательно,



$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6 \cdot 14}{7 \cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6$. Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad FT = FB_1 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}.$$

Высота равнобедренной трапеции $FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}.$

Тогда $S_{EFTD_1} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} = 90.$

Ответ: б) 90.

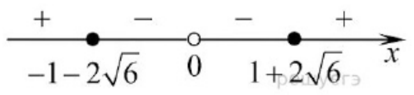
15)

Приведём выражение к общему знаменателю:

$$1 - \frac{2}{|x|} \le \frac{23}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2|x| - 23}{x^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})(|x| + 2\sqrt{6} - 1)}{x^2} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})}{x^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1 - 2\sqrt{6})(x + 1 + 2\sqrt{6})}{x^2} \le 0.$$

Предпоследнее преобразование верно, так как модуль не может принимать отрицательных значений.

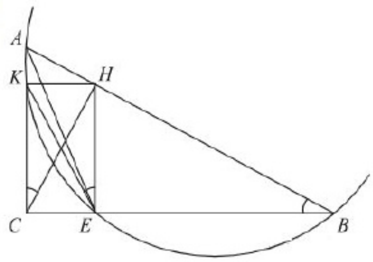


Получаем $-1 - 2\sqrt{6} \le x < 0$ или $0 < x \le 1 + 2\sqrt{6}$.

Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6};\ 0) \cup (0;\ 1 + 2\sqrt{6}]$.

16)

а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K — на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику ABC.



Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$ то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha \text{ , а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит,

$$\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, найдем по теореме синусов:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников CEH и ABC находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}.$$

Следовательно, искомый радиус

$$R = \frac{AB}{\frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{13}{2}.$$

17)

Пусть B_i — размер долга Жанны на конец месяца i, X_i — платеж Жанны в конце месяца i. Мы знаем, что имеет место соотношение $B_i = 1{,}02B_{i-1} - X_i$. Кроме того, мы знаем, что последовательность (B_i) является арифметической прогрессией. При этом $B_0 = 1200$ тыс. руб., а $B_{24} = 0$, так как в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность B_i: $b_i = \frac{24 - i}{24} \cdot 1200$. Значит,

$$X_i = 1,02B_{i-1} - B_i = \left(1,02 \cdot \frac{25 - i}{24} - \frac{24 - i}{24}\right) \cdot 1200 = \frac{1,5 - 0,02i}{24} \cdot 1200.$$

Поскольку X_i линейно зависит от i, последовательность X_i также является арифметической прогрессией. Значит,

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} = \frac{(X_1 + X_{12}) \cdot 12}{2} = 6(50 \cdot 1,48 + 50 \cdot 1,26) = 300 \cdot (1,48 + 1,26) = 300 \cdot 2,74 = 822 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 822 тыс. рублей.

18)

Решим первое уравнение:

$$yx^2+y^2=2y+63-7x^2 \Leftrightarrow yx^2+7x^2+y^2-2y-63=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y+7)(y+x^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-7, \\ y=9-x^2. \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай (1): $y=-7$. При любом a получаем одно решение $x=a+7$, для которого неравенство $x \geq -3$ верно только при $a \geq -10$.

Рассмотрим случай (2):

$$y=9-x^2 \Leftrightarrow 9-x^2=a-x \Leftrightarrow x^2-x+(a-9)=0.$$

Так как $D=1-4(a-9)=37-4a$, то при $a>9,25$ корней нет, при $a=9,25$ получаем один корень $x=0,5$, при $a<9,25$ получаем два различных корня. У параболы $y=x^2-x+(a-9)$ — ветви вверх, абсцисса вершины равна $x_0=0,5>0$.

Значит, оба корня не меньше -3 при $3+a \geq 0$, то есть при $-3 \leq a < 9,25$, а при $a<-3$ один корень меньше -3, а другой — больше -3.

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

a	$a<-10$	$-10 \leq a < -3$	$-3 \leq a < 9,25$	$a=9,25$	$a>9,25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

Остаётся учесть те значения a, при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда $-7=9-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 4$, с учётом $x \geq -3$ из $x+y=a$ получаем, что $x=4$, $a=-3$.

Ответ: $-10 \leq a \leq -3$, $a=9,25$.

19)

а) Каждая из двух девочек могла выиграть оба раза у всех троих мальчиков, получив в сумме 6 очков. Сыграв две партии друг с другом, девочки распределили между собой ещё 2 очка. Всего $6+6+2=14$ очков.

б) Играя по две партии каждый с каждым, десять детей играют всего $2 \cdot \dfrac{9 \cdot 10}{2}=90$ партий. В каждой партии вне зависимости от её исхода разыгрывается одно очко. Поэтому всего набрано 90 очков.

в) Всего детей было $7d+d=8d$, играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2 \cdot \dfrac{8d(8d-1)}{2}=8d(8d-1)$ партий и разыграли $8d(8d-1)$ очков. Из них у мальчиков три четверти очков, а у девочек — одна четверть, то есть у девочек $2d(8d-1)=16d^2-2d$ очков. Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2 \cdot d \cdot 7d$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2 \cdot \dfrac{d(d-1)}{2}=d(d-1)$ очков. Поэтому наибольшее количество очков, которое могли набрать девочки, равно $14d^2+d(d-1)$. Тем самым, имеем: $16d^2-2d \leq 15d^2-d \Leftrightarrow d^2 \leq d$. Следовательно, девочек не могло быть больше одной.

Если девочка была одна, то мальчиков было семеро. Они сыграли 56 партий и разыграли 56 очков. Девочка набрала 14 очков, выиграв у каждого из мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 42 очка.

Ответ: а) 14; б) 90; в) 1.