Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве

Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве

Составитель А. Д. Блинков

Электронное издание

В этот сборник включены избранные задачи окружных олимпиад по математике в г. Москве за последние тринадцать лет (условия и решения). Для удобства использования задачи разбиты по темам. Отметим, что это разбиение носит условный характер, так как в ряде случаев задачу можно отнести к нескольким темам, но оно позволит читателю легче ориентироваться в предложенном материале.

Отдельно и полностью приведены варианты олимпиады двух последних лет: с подробными решениями, комментариями и критериями проверки.

Книжка предназначена для занятий со школьниками 7—11 классов. Она может быть использована как для их отдельной подготовки ко 2 этапу Всероссийской олимпиады школьников, так и на уроках, факультативных занятиях, элективных курсах и занятиях математических кружков.

Ее основные адресаты — учащиеся и школьные учителя математики. Надеемся, что она будет интересна родителям школьников, руководителям математических кружков, студентам педагогических вузов, а также другим любителям математики.

Содержание

Предисловие

Основу данного сборника составляют избранные задачи окружных олимпиад по математике в г. Москве для 7—11 классов за период от 2002/03 до 2012/13 учебного года. Приведены полторы сотни задач, разбитые по разделам и темам, снабжённые единой нумерацией и указаниями, в каком году и в каком классе та или иная задача использовалась (например, 08/9.3 после номера задачи означает, что она была предложена в 2007/08 учебном году в 9 классе и стояла в варианте под номером 3). Разбиение по темам носит условный характер, так как в ряде случаев задачу можно отнести к нескольким темам, но оно позволит читателю легче ориентироваться в предложенном материале.

Практически ко всем задачам приведены ответы и решения (в редких случаях — только указания). Понятно, что многие задачи допускают различные способы решения, но объём книжки не позволяет публиковать несколько способов, поэтому в каждом случае пришлось ограничиться одним, наиболее естественным для данной задачи.

В отдельном разделе приведены полные варианты олимпиады двух последних лет. В этом разделе варианты представлены в том виде, в котором они ежегодно готовятся для работы жюри, т. е. приведены условия задач, различные способы их решения, комментарии и примерные критерии проверки.

Отметим, что за описываемый период статус окружной олимпиады изменялся. Изначально эта олимпиада не носила отборочного характера, для 8—11 классов организовывалась и проверялась каждым округом независимо от других (но проводилась по всему городу в один день и по единым текстам, хотя бывали и исключения), а 7 классы писали олимпиаду в своих школах. В период с 2004/05 по 2007/08 учебные годы для 11 классов олимпиада имела статус «вступительной», т. е. её итоги учитывались при приёме в некоторые московские вузы. Начиная с 2008/09 учебного года окружная олимпиада 7—11 стала вторым (муниципальным) этапом Всероссийской олимпиады школьников по математике, поэтому проводится одновременно для всех школьников Москвы, ставших победителями или призёрами первого (школьного этапа), а её проверка и подведение итогов проходят по единым критериям.

Эти изменения оказывали некоторое влияние на подбор задач для проведения олимпиады, но практически неизменным оставался её формат: 7 класс — 5 задач на 180 минут; 8—11 классы — 6 задач на 240 минут. В те годы, когда олимпиада для 11 классов была «вступительной», вариант мог содержать 7 задач (подразумевалось, что из трёх последних задач учащийся выберет две). Неизменными оставались и основные принципы составления вариантов. Сформулируем их:

- решение каждой задачи не должно требовать знаний, выходящих за пределы общеобразовательной школьной программы соответствующего класса;
- в каждый вариант должны входить задачи по алгебре, геометрии, арифметике (теории делимости) и комбинаторике (в широком смысле); возможны также логические задачи и задачи на составление алгоритмов;
- вариант из шести задач должен содержать две сравнительно простые задачи, две задачи средней трудности и две более сложные задачи;
- среди первых четырёх задач обязательно должны быть две, тематика которых близка к школьной программе данного класса.
- при прочих равных условиях предпочтение отдаётся задачам, имеющим много способов решения.

Отметим, что для составления вариантов редко использовались совсем новые задачи. Составители старались использовать задачи из малоизвестных и труднодоступных источников, подчас переформулировав их условия или изменив их сюжет. Это не даёт возможности привести список авторов задач, но мы искренне благодарны тем, чьи задачи были использованы в том или ином качестве.

Для составления вариантов окружной олимпиады ежегодно формировалась методическая комиссия, «костяк» которой все эти годы оставался практически неизменным. В течение многих лет над составлением вариантов, написанием решений и критериев проверки работали учителя математики: А. Д. Блинков (председатель МК), Т. А. Баранова, Е. Б. Гладкова, Е. С. Горская, О. Р. Горская, А. З. Гурвиц, В. М. Гуровиц, А. В. Иванищук, К. П. Кочетков, А. Г. Мякишев, И. Б. Писаренко, Д. В. Прокопенко, И. В. Раскина, А. И. Сгибнев, А. В. Хачатурян, П. В. Чулков, Д. Э. Шноль.

В разные годы в состав методической комиссии входили также А. Н. Андреева, Ю. А. Блинков, А. А. Волкова, Е. Ю. Иванова, А. К. Ковальджи, Ю. Г. Кудряшов, Р. М. Кузнец, А. А. Марачев, Н. М. Нетрусова, М. Г. Потапова, А. С. Чеботарёв, Е. А. Чернышёва. В последние годы в работу комиссии включились З. В. Ильиченкова, С. Л. Синякова и молодые учителя: Э. А. Акопян, С. М. Крачковский, Н. Т. Мартынова, Д. Г. Мухин, Н. А. Наконечный, А. Л. Федулкин, И. А. Эльман.

Хочется выразить надежду, что предлагаемый сборник поможет школьникам и их учителям при подготовке к следующим олимпиадам.

Условия задач

Арифметика и алгебра

Простая арифметика

1. *13/8.1.* Сравните числа:

$$A = 2011 \cdot 20122012 \cdot 201320132013$$

и

$$B = 2013 \cdot 20112011 \cdot 201220122012.$$

2. *07/7.2.* Петя тратит треть своего времени на школу, пятую часть — на игру в футбол, шестую часть — на телевизор, седьмую часть — на решение задач по математике и треть — на сон. Можно ли так жить?

3. *08/9.3.* Несколько школьников ходили за грибами. Школьник, набравший наибольшее количество грибов, собрал $\frac{1}{5}$ общего количества грибов, а школьник, набравший наименьшее количество грибов, собрал $\frac{1}{7}$ общего количества. Сколько было школьников?

4. *12/9.1.* После возвращения цирка с гастролей знакомые расспрашивали дрессировщика Казимира Алмазова о «пассажирах» его автофургона: «Тигры были?» — «Да, причём их было в семь раз больше, чем не тигров». «А обезьяны?» — «Да, их было в семь раз меньше, чем не обезьян». «А львы были?» Ответьте за Казимира Алмазова.

5. *10/7.1.* Будильник спешит на 9 минут в сутки. Ложась спать в 22:00, на нём установили точное время. На какое время надо завести звонок, чтобы будильник зазвенел ровно в 6:00?

6. *07/8.3.* На вопрос о возрасте его детей математик ответил: «У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок, — 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей — 14 лет». Сколько лет каждому ребёнку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день?

7. *12/7.3.* У Пети в бутылке было на 10% больше «Фанты», чем у Васи. Петя отпил из своей бутылки 11% её содержимого, а Вася из своей — 2% содержимого. У кого после этого осталось больше «Фанты»?

8. *05/7.2.* Гонца, способного пробегать большие расстояния, отправили доставить сообщение с таким расчётом, чтобы к воинам, сражающимся с ордой, успело подойти подкрепление. Ему надо было пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать весь путь со средней скоростью 12 миль в час?

9. *09/9.1.* Пройдя $\frac{4}{9}$ длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, ещё не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил своё движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и пешехода.

10. *08/8.4.* Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли ему смысл идти или есть риск упустить автобус?

Задачи на составление уравнений

11. *09/8.3.* В 8 «Г» классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24 % двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25 %. Какой процент двоечников в 8 «Г» сейчас?

12. *10/7.4.* Карлсону подарили пакет с конфетами: шоколадными и карамельками. За первые 10 минут Карлсон съел 20 % всех конфет, причём 25 % из них составляли карамельки. После этого Карлсон съел ещё 3 шоколадные конфеты, и доля карамелек среди съеденных Карлсоном конфет понизилась до 20 %. Сколько конфет было в подаренном Карлсону пакете?

13. *06/11.2.* Остап Бендер и Киса Воробьянинов разделили между собой выручку от продажи слонов населению. Остап подумал: если бы я взял денег на 40 % больше, то доля Кисы уменьшилась бы на 60 %. А как изменилась бы доля Воробьянинова, если бы Остап взял себе денег на 50 % больше?

14. *10/9.2.* Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

15. *13/9.2.* Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

16. *13/11.2.* Туристическая фирма провела акцию: «Купи путёвку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путёвку, и получи стоимость путёвки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

Тождественные преобразования

17. *12/8.1.* Вычислите: $\dfrac{(2001\cdot 2021+100)(1991\cdot 2031+400)}{2011^4}$.

18. *10/8.4.*. Представьте числовое выражение $2\cdot 2009^2+2\cdot 2010^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

19. *09/8.1.* Известно, что $x^2+y^2=19$, $xy=3$. Найдите $x+y$.

20. *09/10.1.* Найдите значение $x-y$, если

$$x^3-y^3=45 \quad \text{и} \quad xy(x-y)=6.$$

21. *08/8.2.* Числа a, b и c отличны от нуля, и выполняются равенства $a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1$. Докажите, что $ab+bc+ca=0$.

22. *10/11.4.* Известно, что $\dfrac{x}{x^2+x+1}=a$ и при некоторых значениях x число a рациональное. Докажите, что при тех же значениях x значение выражения $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ также рационально.

Позиционная запись чисел

23. *07/7.4.* Коля задумал трёхзначное число $\overline{xyz}$. Когда он записал число в обратном порядке $\overline{zyx}$, оказалось, что оно делится на 5, а разность между задуманным числом и числом, записанным в обратном порядке, равна 99. Какие числа мог задумать Коля?

24. *12/7.5.* Из четырёх цифр, отличных от нуля, составили два четырёхзначных числа: самое большое из возможных и самое маленькое. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11 990. Какие числа могли быть составлены?

25. *08/9.1.* Существует ли натуральное число, кратное 2007, сумма цифр которого равна 2007?

26. *09/10.4.* В некотором натуральном числе переставили цифры. Докажите, что если сумма полученного числа с исходным равна 10^{2008}, то исходное число делилось на 5.

27. *12/8.4.* Назовём натуральное семизначное число «удачным», если оно делится на произведение всех своих цифр. Существуют ли четыре последовательных «удачных» числа?

28. *11/7.5.* Коля утверждает, что можно выяснить, делится ли на 101 сумма всех четырёхзначных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 9, не вычисляя самой суммы. Прав ли Коля?

29. *13/11.5.* В десятичной записи некоторого числа цифры расположены в порядке убывания (слева направо). Может ли это число быть кратным числу 111?

Уравнения в целых числах

30. *09/7.5.* Можно ли подобрать такие целые числа a и b, для которых $ab(a+b)=1\,234\,567$?

31. *08/11.2.* В первый день Маша собрала на 25 % грибов меньше, чем Вася, а во второй день — на 20 % больше, чем Вася. За два дня Маша собрала грибов на 10 % больше, чем Вася. Какое наименьшее количество грибов они могли собрать вместе?

Разложение на простые множители

32. *10/8.1.* Произведение двух чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

33. *08/10.3.* Найдите, на какую наибольшую натуральную степень числа 2007 делится число 2007!.

34. *12/9.4.* Незнайка утверждает, что существует восемь таких последовательных натуральных чисел, что в разложение их на простые множители каждый сомножитель входит в нечётной степени (например, два таких последовательных числа: $23=23^1$ и $24=2^3\cdot 3^1$). Прав ли он?

Разные задачи на делимость целых чисел

35. *13/7.4.* Малыш подарил Карлсону 111 конфет. Сколько-то из них они тут же съели вместе, 45 % оставшихся конфет пошли Карлсону на обед, а треть конфет, оставшихся после обеда, нашла во время уборки фрекен Бок. Сколько конфет она нашла?

36. *07/8.5.* Маша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

37. *09/8.6.* Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трёх из них была простым числом?

38. *04/10.4.* Известно, что сумма n^2+2n оканчивается на 4 (n — натуральное число). Какова предпоследняя цифра этой суммы?

39. *07/11.4.* Найдите все такие натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

40. *12/11.5.* Известно, что A — наибольшее из чисел, являющихся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 2011. На какую наибольшую степень тройки делится число A?

Линейная функция и линейные уравнения

41. *13/8.2.* В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

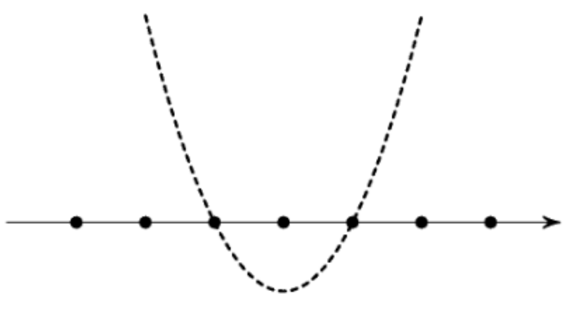
42. *05/10.1.* Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

Квадратичная функция и квадратные уравнения

43. *09/10.1.* Графики функций $y=x^2+ax+b$ и $y=x^2+cx+d$ пересекаются в точке (1; 1). Сравните a^5+d^6 и c^6-b^5.

44. *08/10.1.* Может ли вершина параболы $y=4x^2-4(a+1)x+a$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении a?

45. *12/9.2.* На рисунке изображён график приведённого квадратного трёхчлена (ось ординат стёрта, расстояние между соседними отмеченными точками равно 1). Чему равен дискриминант этого трёхчлена?



46. *09/11.1.* Сколько корней имеет квадратное уравнение ax^2+ $+bx+c=0$, если $|a+c|=|b|$, а числа a и c различны?

47. *12/10.2.* Прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$.

48. *10/10.3.* Известно, что при любом положительном значении p корни уравнения (с переменной x) $ax^2-3x+p=0$ существуют и все они положительны. Докажите, что $a=0$.

49. *11/10.3.* График функции $y=x^2+ax+b$ пересекает ось абсцисс в точках A и C, а ось ординат — в точке B. Известно, что $A(1;0)$. Найдите угол CBO, где O — начало координат.

Уравнения высших порядков и иррациональные уравнения

50. *04/11.4.* Известно, что α — корень уравнения $x^3+1=2004x$. Найдите один из корней уравнения $x^3+1=2004x^2$.

51. *09/10.3.* Решите уравнение

$$(x+1)^{99}+(x+1)^{98}(x+2)+(x+1)^{97}(x+2)^2+\ldots+(x+2)^{99}=0.$$

52. *03/11.1.* Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+x-8}.$$

Доказательство неравенств

53. *09/10.5.* Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2+x)(2+y)(2+z)\geqslant 27$.

54. *04/10.5.* Докажите, что $x^2y^2(x^2+y^2)\leqslant 2$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и $x+y=2$.

Тригонометрия

55. *06/11.1.* Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+4\sin^2 y-4=0,\\ \cos x-2\cos^2 y-1=0.\end{cases}$$

56. *11/11.1.* Найдите значение выражения

$$(2-2\sin 2010^\circ)^{1+\sin 2010^\circ}-\operatorname{ctg} 2010^\circ.$$

57. *10/11.1.* Числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ — корни квадратного уравнения $x^2-\sqrt{2}x+c=0$. Какие значения может принимать c?

58. *07/11.1.* Что больше: $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$ или $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$?

59. *09/11.2.* Решите уравнение

$$\sin x+\sin^3 x+2008\sin^5 x=\cos 2x+\cos^3 2x+2008\cos^5 2x.$$

60. *04/11.3.* Сколько отрицательных чисел среди первых ста членов последовательности $\cos 1°$, $\cos 10°$, $\cos 100°$, $\cos 1000°$, …?

61. *07/11.6.* Решите уравнение

$$(x^3-2)(2^{\sin x}-1)+(2^{x^3}-4)\sin x=0.$$

62. *08/11.6.* Докажите, что если α, β и γ — углы остроугольного треугольника, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2$.

Общие свойства функций и функциональные соотношения

63. *03/11.3.* Верно ли, что графики функций $y=2^x$ и $y=x^3$ пересекаются в одной точке?

64. *08/11.4.* Непрерывная функция $f(x)$ такова, что для всех действительных x выполняется неравенство $f(x^2)-(f(x))^2\geqslant\frac{1}{4}$. Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно имеет точки экстремума?

65. *13/11.3.* Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1)=f(x)+2x+3$. Известно, что $f(0)=1$. Найдите $f(2012)$.

66. *07/11.4.* Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy)=f(x)+f(y)$. Найдите $f(2007)$, если $f\left(\frac{1}{2007}\right)=1$.

67. *06/11.3.* Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x+1)=4x^2+14x+7$.

68. *03/11.6.* Дана функция $f(x)$. Известно, что для всех действительных x выполняются неравенства $f(x+3)\leqslant f(x)+3$ и $f(x+2)\geqslant f(x)+2$. Докажите, что функция $g(x)=f(x)-x$ периодическая, и найдите её период.

Комбинаторная алгебра

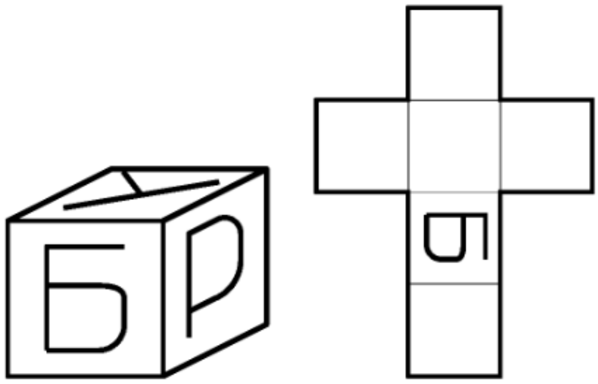
69. *12/11.2.* На доске записали 20 первых чисел натурального ряда. Когда одно из чисел стёрли, оказалось, что среди оставшихся чисел одно является средним арифметическим всех остальных. Найдите все числа, которые могли быть стёрты.

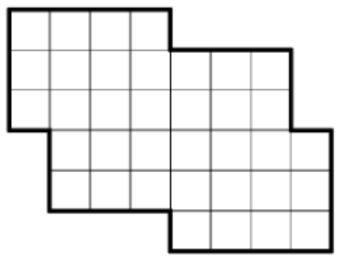
70. *09/9.6.* Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов чётно. Один из столбов покрашен в жёлтый цвет, другой — в синий, а остальные — в белый. Назовём расстоянием между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до жёлтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2008 км.

Геометрия

Наглядная и комбинаторная геометрия

71. *09/7.2.* На рисунке слева изображён куб, а на рисунке справа — его развёртка. На нужном месте развёртки куба запишите в правильном положении буквы У и Р.



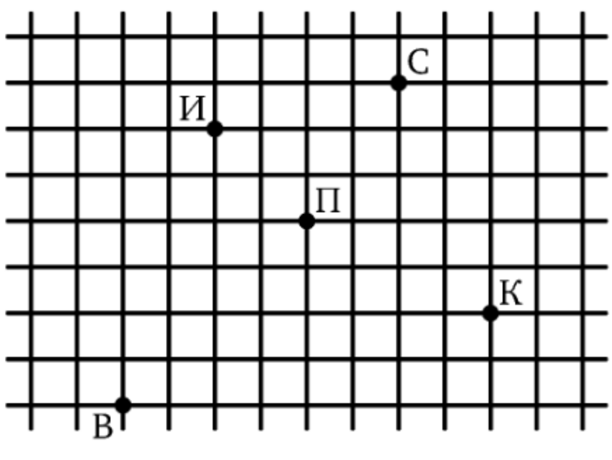


72. *11/7.2.* Покажите, как разрезать фигуру (см. рисунок) на четыре равные части по линиям сетки.

73. 06/7.3. Отметьте 6 точек на плоскости так, чтобы от каждой из них на расстоянии 1 находилось ровно 3 точки.

74. *03/8.2.* Какой треугольник надо выбрать, чтобы после проведения в нём одного отрезка на чертеже оказались равносторонний, равнобедренный, разносторонний, остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники?

75. *12/7.2.* В точке *В* живёт Винни-Пух, а в точках *К*, *С*, *П* и *И* — его друзья Кролик, Сова, Пятачок и ослик Иа-Иа (см. рисунок). За



утро Винни-Пух навестил их всех по одному разу и вернулся домой. При этом он протоптал в снегу 5 прямых тропинок, не пересекающих друг друга. Начертите как можно больше возможных маршрутов Винни-Пуха.

76. *11/10.1.* К каждой грани деревянного куба приклеили по такому же кубу. Объясните, как разделить получившееся тело на шесть равных частей.

77. *04/11.2.* Можно ли так расставить стрелки на рёбрах тетраэдра, чтобы сумма получившихся векторов оказалась равна нулевому вектору?

78. *03/11.5.* Может ли сумма рёбер какой-либо треугольной пирамиды быть меньше суммы рёбер другой треугольной пирамиды, расположенной внутри первой?

Простая планиметрия

79. *09/7.4.* В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки D и E, что $AD=DE=EC$. Может ли оказаться, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

80. *10/8.2.* В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол $40°$. Найдите угол ABC.

81. *12/8.3.* На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P. Оказалось, что $AK=AP$. Найдите отношение $BK:PM$.

82. *07/8.3.* Середину большей боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

83. *13/8.4.* В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE=CD$.

84. *13/9.3.* В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в два раза больше стороны AB. На стороне BC выбрана точка K так, что $\angle KDB = \angle BDA$. Найдите отношение $BK:KC$.

85. *11/9.3.* В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе. На катете AC отмечена точка F, а на отрезке AD — точка E так, что $CD=DE$ и $FE \perp AB$. Найдите угол CBF.

86. *03/8.4.* Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, большее основание которой равно 2, а три оставшиеся стороны равны по 1.

87. *06/9.2.* Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведённая из той же вершины.

88. *09/10.2.* Ромб и равнобокая трапеция описаны около одного круга и имеют равную площадь. Сравните их острые углы.

89. *07/10.2.* Сторону AB треугольника ABC продолжили за вершину B и выбрали на луче AB точку A_1 так, что точка B — середина отрезка AA_1. Аналогично сторону BC продолжили за вершину C и отметили на продолжении точку B_1 так, что C — середина BB_1. Так же продолжили сторону CA за вершину A и отметили на продолжении точку C_1 так, что A — середина CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.

90. *03/11.2.* В треугольнике ABC точки M и N делят сторону AC так, что

$$AM : MN : NC = 1 : 2 : 3,$$

а точка P делит сторону AB так, что $AP : PB = 3 : 1$. Известно, что площадь треугольника PMN равна S. Найдите площадь треугольника ABC.

91. *07/11.3.* Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM. Может ли отрезок AM оказаться медианой треугольника ABC?

92. *04/10.2.* В треугольнике ABC середины сторон AC и BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Найдите длину стороны AB, если длина медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, равна m.

93. *07/10.3.* Дан равносторонний треугольник ABC. Точка K — середина стороны AB, точка M лежит на стороне BC, причём $BM : MC = 1 : 3$. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC?

Более сложная планиметрия

94. *10/8.5.* В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BD к боковой стороне. На прямой BC выбрана точка E так, что угол EDB прямой. Найдите BE, если $CD = 1$.

95. *12/8.6.* В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На продолжении стороны AB за точку B отмечена такая точка M, что $MC = MD$. Докажите, что $\angle AMO = \angle MAD$.

96. *08/8.5.* На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD:DC = 1:2$. Докажите, что в треугольниках ADB и CDB можно провести по одной медиане так, чтобы они имели равные длины.

97. *13/8.6.* Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

98. *08/9.4.* В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle CBD = \angle CAB$ и $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC, AD и AC можно сложить прямоугольный треугольник.

99. *08/9.6.* В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы A, B и D прямые. Найдите угол ADB, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.

100. *12/9.5.* Отрезок AL — биссектриса треугольника ABC, K — такая точка на стороне AC, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.

101. *13/9.6.* Через концы основания BC трапеции $ABCD$ провели окружность, которая пересекла боковые стороны AB и CD трапеции в точках M и N соответственно. Известно, что точка T пересечения отрезков AN и DM также лежит на этой окружности. Докажите, что $TB = TC$.

102. *11/10.5.* Из точки T провели к окружности касательную TA и секущую, пересекающую окружность в точках B и C. Биссектриса угла ATC пересекает хорды AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$PA = \sqrt{PB \cdot QC}.$$

103. *09/11.5.* Точка M — середина хорды AB некоторой окружности. Хорда CD пересекает AB в точке M. На CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности, и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.

104. *10/11.5.* Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD; точка O пересечения его диагоналей AC и BD является центром другой окружности, касающейся стороны BC. Из вершин B и C проведены касательные ко второй окружности, пересекающиеся в точке T. Докажите, что точка T лежит на отрезке AD.

105. *10/10.6.* Дан треугольник ABC, в котором $AC = \dfrac{AB+BC}{2}$. Докажите, что центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, середины сторон AB и BC и вершина B лежат на одной окружности.

106. *04/11.5.* В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектриса угла D перпендикулярна стороне AB и пересекает её в точке M. В каком отношении DM делит площадь трапеции, если длина отрезка AM в два раза больше длины отрезка MB?

107. *08/11.5.* В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB. Можно ли так расположить точки E и F на сторонах AC и BC соответственно, чтобы площадь треугольника DEF оказалась больше суммы площадей треугольников AED и BFD?

Стереометрия

108. *11/11.2.* Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB; M и N — точки пересечения медиан граней ABC и ABD соответственно. Докажите, что отрезки CN и DM равны.

109. *10/11.3.* На поверхности куба укажите точки, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

110. *09/11.3.* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сравните расстояния от вершины A до плоскостей A_1BD и C_1BD.

111. *12/11.3.* Длина ребра правильного тетраэдра равна a. Через одну из вершин тетраэдра проведено треугольное сечение. Докажите, что периметр P этого треугольника удовлетворяет неравенству $P > 2a$.

112. *08/11.3.* Найдите угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса, если известно, что существуют три образующие боковой поверхности конуса, попарно перпендикулярные друг другу.

113. *06/11.5.* Из точки, не лежащей в плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и три наклонные, проекции которых на данную плоскость равны a, b и c. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные образуют с плоскостью углы, сумма которых равна 90°.

114. *07/11.5.* Основанием прямоугольного параллелепипеда $A\ldots D_1$ является квадрат $ABCD$. Найдите наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

115. *13/11.6.* В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде середина N ребра B_1C_1 верхней грани $A_1B_1C_1D_1$ соединена с серединой M ребра AB нижней грани $ABCD$. Прямые B_1C_1 и AB не лежат в одной плоскости. Докажите, что проекции рёбер B_1C_1 и AB на прямую MN равны.

Комбинаторика и логика

Раскраски и инварианты

116. *05/7.4.* На доске для морского боя размером 10×10 находится корабль размером 1×3. Можно ли, сделав 33 выстрела, наверняка в него попасть?

117. *13/7.5.* В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рисунок слева). Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число (не обязательно положительное). Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (*Клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону.*)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

118. *12/8.5.* В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить клетки шахматной доски 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

119. *10/9.4.* Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

120. *03/11.4.* На доске записано число x. За один шаг его можно заменить либо на число $2x+4$, либо на число $3x+8$, либо на число x^2+5x. Можно ли за несколько таких шагов из числа 3 получить число 2002 или число 2003?

121. *11/10.4.* Некоторые клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет, а остальные — в чёрный. Коля перекрашивает доску: за один ход он имеет право перекрасить в противоположный цвет «уголок» из трёх клеток. Докажите, что за несколько перекрашиваний Коля сможет сделать всю доску чёрной.

122. *08/10.5.* В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Около каждой вершины и около каждой точки пересечения диагоналей поставили число -1. За одну операцию разрешается поменять на противоположные знаки всех чисел, стоящих вдоль одной стороны или вдоль одной диагонали. Можно ли такими операциями сделать все числа равными 1?

123. *04/11.6.* Программист Федя играет с компьютером в следующую игру. На экране компьютера — число 123. Каждую минуту оно увеличивается на 102. Феде разрешается в любой момент переставить цифры у числа, появившегося на экране. Компьютер выиграет, если на экране появится четырёхзначное число. Может ли Федя играть так, чтобы не проиграть?

Оценка плюс пример

124. *10/7.3.* В классе 25 учеников. Известно, что у любых двух девочек класса количество друзей-мальчиков из этого класса не совпадает. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

125. *09/7.3.* Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в гирлянде, если всего лампочек 50?

126. *07/8.6.* На некоторых клетках шахматной доски лежит по конфете. Известно, что на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) лежит чётное количество конфет (возможно, ни одной). Какое наибольшее количество конфет может лежать на доске?

127. *12/9.6.* Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?

128. *12/11.6.* Какое наименьшее количество клеток требуется отметить на шахматной доске, чтобы каждая клетка доски (отмеченная или неотмеченная) граничила (по стороне) хотя бы с одной отмеченной клеткой?

129. *11/11.6.* На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. Ходом фишки называется перестановка её через фишку, стоящую на соседней (по горизонтали, вертикали или диагонали) клетке, непосредственно за которой на той же линии имеется свободная клетка. Какое наибольшее количество фишек может насчитывать такое их расположение на доске, в котором любая фишка сможет сделать первый ход?

130. *10/11.6.* Какое наименьшее количество трёхклеточных уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?

131. *07/11.7.* Даны таблица 100×100 клеток и N фишек. Рассматриваются все расстановки фишек в клетки таблицы, удовлетворяющие условию: никакие две фишки не стоят в соседних клетках.

При каком наибольшем N в любой из расстановок можно найти хотя бы одну такую фишку, что от её перемещения в соседнюю клетку заданное условие не нарушится? (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону*.)

Логика и алгоритмы

132. *13/7.2.* Собираясь в школу, Миша нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом всё необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашёл не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет?

133. *03/8.5.* На острове рыцарей и лжецов провели перепись населения. Часть жителей заявила, что на острове чётное количество рыцарей, а остальные — что нечётное количество лжецов. Может ли на острове жить ровно 2003 жителя?

134. *11/9.4.* На острове рыцарей и лжецов каждого жителя спросили про каждого из остальных, лжец тот или рыцарь. Всего было получено 26 ответов «рыцарь» и 30 ответов «лжец». Сколько рыцарей могло быть на этом острове?

135. *06/7.5.* На кружке физики учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирь массами 1, 2, 3, … …, 16 грамм так, что одна из чашек перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой одну гирю, причём после выхода каждого ученика перевешивала противоположная чаша весов. Какая гиря наверняка осталась на весах?

136. *09/8.3.* По кругу стоит 101 коробка. В каждой коробке лежат чёрные и белые шарики, а на коробке написано, сколько в ней чёрных шариков и сколько белых. Петя хочет переложить из каждой коробки по одному шарику в следующую по часовой стрелке коробку так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Сможет ли он это сделать?

137. *12/10.4.* Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз. Ведущий знает, где лежит приз. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз?

Математические игры

138. *07/8.6.* На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размером 5×9. В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают её на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний угол. Кто выиграет, как бы ни играл соперник?

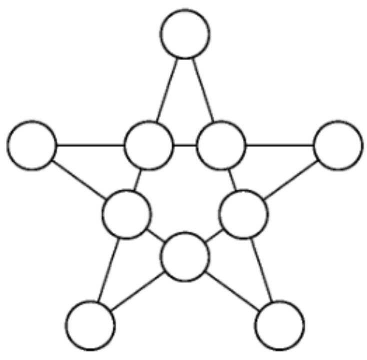
139. *13/9.4.* Под ёлкой лежат 2012 шишек. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берёт одну или четыре шишки, а Иа-Иа — одну или три. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

140. *03/9.6.* Имеется горизонтальная полоска бумаги шириной в одну клетку и длиной в 2003 клетки. Играют двое. Коля имеет право закрасить три рядом стоящие клетки, а Ваня — четыре рядом стоящие клетки. Проигрывает тот, кому нечего закрашивать. Объясните Коле, как надо играть, чтобы не проиграть, если он ходит первым.

141. *09/10.6.* Клетчатая прямоугольная сетка размером $m \times n$ связана из верёвочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную верёвочку. Если не останется ни одного замкнутого верёвочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит, как бы ни играл соперник, и как он должен для этого играть?

Подсчёт несколькими способами

142. *12/8.2.* На столе лежало 100 карточек, у каждой из которых одна сторона чёрная, а другая белая. Вначале все карточки лежали белой стороной вверх. Костя перевернул 50 карточек, затем Таня перевернула 60 карточек, а после этого Оля — 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались лежащими чёрной стороной вверх. Сколько карточек было перевёрнуто трижды?



143. *09/7.5.* Можно ли в кружочках на пятиконечной звезде (см. рисунок) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырёх чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?

144. *09/8.5.* Прямоугольник разделён на квадраты со стороной 1 см. В каждом квадрате записано число так, что сумма чисел в каждой строке равна 1, а сумма чисел в каждом столбце равна 2. Может ли площадь прямоугольника быть равной 2008 см^2?

145. *11/9.5.* На гранях каждого из восьми кубиков нарисованы точки: по одной на двух противоположных гранях, по две точки ещё на двух противоположных гранях и по три — на двух оставшихся гранях. Из этих восьми кубиков Петя сложил куб и записал количество точек на каждой его грани. Мог ли он получить шесть последовательных натуральных чисел?

Турниры

146. *10/8.3.* Школьный чемпионат по настольному теннису проводили по олимпийской системе. Победитель выиграл 6 партий. Сколько участников турнира выиграло игр больше, чем проиграло? (*На турнире по олимпийской системе участников разбивают на пары. Те, кто проиграл игру в первом туре, выбывают. Тех, кто выиграл в первом туре, снова разбивают на пары. Те, кто проиграл во втором туре, выбывают и т. д. В каждом туре для каждого участника нашлась пара.*)

147. *10/11.2.* В футбольном турнире участвовало 20 команд (каждая сыграла с каждой по одному матчу). Могло ли в результате оказаться так, что каждая из команд-участниц выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?

148. *09/8.5.* Шестнадцать футбольных команд из шестнадцати стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех странах, кроме своей родины?

149. *13/8.5.* Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (*Победа —* 3 *очка, ничья —* 1 *очко, поражение —* 0.)

Разное

150. *10/9.6.* Дан набор из таких 2009 чисел, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных чисел, то получится тот же набор. Найдите произведение всех чисел набора.

151. *10/10.5.* В течение 92 дней авиакомпания ежедневно выполняла по десять рейсов. За день каждый самолёт выполнял не более одного рейса. Известно, что для любой пары дней есть один и только один самолёт, летавший в оба эти дня. Докажите, что есть самолёт, летавший каждый день.

152. *09/10.6.* Алиса и Базилио украли у папы Карло чемодан. Замок на чемодане открывается, если три колёсика на нём (каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций) установлены в определённой комбинации. Однако в силу ветхости механизма чемодан откроется, если любые два колёсика из трёх поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что он сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (*Попыткой называется установка какой-либо комбинации колёсиков*.)

Ответы, решения, указания, комментарии

Арифметика и алгебра

Простая арифметика

1. Ответ: $A=B$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}A &= 2011\cdot 20122012\cdot 201320132013 = \\ &= 2011\cdot 2012\cdot 10001\cdot 2013\cdot 100010001;\\ B &= 2013\cdot 20112011\cdot 201220122012 = \\ &= 2013\cdot 2011\cdot 10001\cdot 2012\cdot 100010001.\end{aligned}$$

2. Ответ: нельзя.

Указание. Сумма дробей больше единицы.

3. Ответ: 6.

Решение. Среднее количество грибов, собранных одним школьником, меньше $\frac{1}{5}$ (значит, школьников больше пяти), но больше $\frac{1}{7}$ (значит, школьников меньше семи).

Случай, указанный в ответе, возможен: например, школьники собрали 5, 5, 6, 6, 6 и 7 грибов соответственно.

4. Ответ: львов не было.

Решение. Поскольку тигров было в семь раз больше, чем не тигров, количество тигров составляет $\frac{7}{8}$ от общего количества всех животных. Поскольку обезьян было в семь раз меньше, чем не обезьян, количество обезьян составляет $\frac{1}{8}$ от общего количества всех животных. Так как $\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$, животных, отличных от тигров и обезьян, в фургоне не было.

Отметим, что ответ в задаче не изменится, если в условии вместо числа 7 поставить любое другое положительное число.

5. Ответ: на 6 часов 3 минуты.

Решение. За сутки (24 часа) будильник уходит вперёд на 9 минут, поэтому за 8 часов с 22:00 до 6:00 он уйдёт вперёд на 3 минуты, т. е. в 6:00 он будет показывать 6:03.

6. Ответ: 8 лет, 5 лет и 1 год.

Решение. Год назад суммарный возраст детей был 11 лет, значит, родителям в сумме было 59 лет. А в день рождения первенца эта сумма равнялась 45. Значит, между этими двумя событиями прошло

$(59-5):2=7$ лет. Следовательно, первому ребёнку год назад было 7 лет, а второму — 4.

7. Ответ: у Васи.

Решение. Пусть у Васи в бутылке было a мл «Фанты». тогда у Пети было $1{,}1a$ мл. После того как каждый мальчик отпил из своей бутылки, у Васи осталось $0{,}98a$ мл «Фанты», а у Пети осталось $0{,}89\cdot 1{,}1a=0{,}979a$ мл. Таким образом, у Васи осталось больше.

8. Ответ: не сможет.

Указание. При средней скорости 12 миль в час на весь путь потребуется 2 часа, но гонец их истратил на первые 16 миль.

9. Ответ: 9.

Решение. Из условия следует, что время, которое требуется машине, чтобы подъехать к мосту, равно времени, которое требуется пешеходу, чтобы пройти $\frac{4}{9}$ моста. Следовательно, если пешеход продолжит движение, то к моменту въезда машины на мост он пройдёт $\frac{8}{9}$ моста. Значит, за то время, пока машина проезжает мост, пешеход успевает пройти его девятую часть, поэтому скорость машины в 9 раз больше скорости пешехода.

10. Ответ: имеет смысл идти.

Решение. Пусть мальчик пошёл к следующей остановке и в какой-то момент заметил автобус. Скорость автобуса в четыре раза больше скорости мальчика, поэтому за одно и то же время автобус проезжает расстояние в четыре раза больше. В случае, если они двигаются навстречу друг другу, до встречи с автобусом мальчик пробежит пятую часть от 2 км, т. е. $\frac{2}{5}$ км. Это означает, что, отойдя от остановки не более чем на $\frac{2}{5}$ км, мальчик сможет успеть на автобус, побежав назад. В случае, если автобус догоняет мальчика, мальчик успеет пробежать треть от 2 км (а автобус — $\frac{4}{3}$), т. е. $\frac{2}{3}$ км, до момента, когда автобус его догонит. Это означает, что он сможет успеть на автобус, если до следующей остановки осталось не более $\frac{2}{3}$ км. Так как $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}>1$, у мальчика всегда будет возможность успеть на автобус и имеет смысл идти.

Задачи на составление уравнений

11. Ответ: 28 %.

Решение. Пусть сейчас в классе n учеников. По условию

$$0{,}24n=0{,}25(n-1),$$

т. е. $0{,}01n = 0{,}25$. Значит, $n = 25$. Один человек составляет 4 % от 25, поэтому сейчас в классе $24 + 4 = 28$ % двоечников.

12. Ответ: 60.

Решение. Пусть за первые 10 минут Карлсон съел x конфет, тогда шоколадных среди них было $0{,}75x$. Из условия задачи следует, что доля съеденных Карлсоном шоколадных конфет составляет 80 %, значит, $0{,}75x + 3 = 0{,}8(x + 3)$. Отсюда $x = 12$, что составляет 20 % всех конфет. Следовательно, всего в пакете было 60 конфет.

13. Ответ: уменьшилась бы на 75 %.

Решение. Пусть Остап взял себе x рублей, а Киса взял себе y рублей, тогда по условию $0{,}4x = 0{,}6y$. Отсюда получим, что $0{,}5x = 0{,}75y$. Следовательно, если бы доля Остапа увеличилась на 50 %, то доля Воробьянинова уменьшилась бы на 75 %.

14. Ответ: 5 двоек.

Указание. Добавим по единице к каждой оценке Васи. Его сумма баллов увеличится на 20 и станет больше суммы оценок Коли на учетверённое количество Колиных двоек.

15. Ответ: 500 рублей.

Решение. Пусть килограмм соли стоит в Твери x рублей, а в Москве — y рублей и купец в первый раз купил a кг соли. Тогда по условию $a(y - x) = 100$. Вырученная сумма составила ay рублей, значит, во второй раз купец смог купить $\frac{ay}{x}$ кг соли. В этом случае прибыль составила $\frac{ay}{x} \cdot y - ay = \frac{ay(y-x)}{x}$ рублей. По условию $\frac{ay(y-x)}{x} = 120$. Из двух полученных уравнений следует, что $\frac{100y}{x} = 120$, т. е. $y = \frac{6}{5}x$. Подставляя этот результат в первое уравнение, получим, что $ax = 500$.

16. Ответ: 29.

Решение. Пусть каждый из x потенциальных «счастливчиков» привёл по 4 друга. Тогда «приведённых» клиентов $4x$, ещё 13 пришли сами, значит, всего туристов было $13 + 4x$.

С другой стороны, x человек привели новых клиентов, а 100 человек не привели, т. е. всего туристов было $x + 100$. Получим уравнение $13 + 4x = x + 100$, откуда $x = 29$.

Тождественные преобразования

17. Ответ: 1.

Решение. Заметим, что

$$2001 \cdot 2021 + 100 = (2011 - 10)(2011 + 10) + 100 = \\ = 2011^2 - 10^2 + 100 = 2011^2.$$

Аналогично

$$1991\cdot 2031=(2011-20)(2011+20)+400=$$
$$=2011^2-20^2+400=2011^2.$$

Тогда $\dfrac{2011^2\cdot 2011^2}{2011^4}=1$.

18. Ответ: например, 4019^2+1^2.

Указание. Воспользуйтесь формулой

$$2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2.$$

19. Ответ: ± 5.

Указание. $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$.

20. Ответ: 3.

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и вычтем из первого уравнения: $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=27$, т. е. $(x-y)^3=27$. Следовательно, $x-y=3$.

21. Решение. Умножив обе части равенства $a+\dfrac{b}{c}=1$ на c, получим, что $ac+b=c$, откуда $ac=c-b$. Аналогично $ba=a-c$ и $cb=b-a$. Значит, $ab+bc+ca=(a-c)+(b-a)+(c-b)=0$.

22. Решение. 1. Если $a=0$, то $x=0$, тогда $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=0$, т. е. $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ рационально.

2. Если $a\neq 0$, то $x\neq 0$, тогда

$$\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}+1}=a,$$

откуда $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}-1$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^2-1}=\frac{a^2}{1-2a}.$$

Заметим, что $a\neq\dfrac{1}{2}$, иначе мы имели бы $x+\dfrac{1}{x}=1$, что невозможно ни при каких x. При любых других рациональных значениях a выражение $\dfrac{a^2}{1-2a}$ принимает рациональные значения, что и требовалось.

Позиционная запись чисел

23. Ответ: 504, 514, 524, 534, 544, 554, 564, 574, 584, 594.

Решение. Если $\overline{zyx}$ делится на 5, то $x=5$ (случай $x=0$ невозможен, так как задуманное число не могло начинаться с нуля). Так как

$$99=\overline{xyz}-\overline{zyx}=100x+10y+z-(100z+10y+x)=99(x-z),$$

имеем $x-z=1$, и, учитывая, что $x=5$, получим $z=4$. Средняя цифра числа может быть любой, поэтому существует десять искомых чисел.

24. Ответ: были составлены числа 1999 и 9991.

Решение. Обозначим цифры, из которых были составлены числа, в порядке возрастания: a, b, c и d (т. е. $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$). Тогда самое маленькое число, составленное из этих цифр, — $\overline{abcd}$, а самое большое — $\overline{dcba}$. Так как

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d,$$

а $\overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$, их сумма равна

$$(1000a + 100b + 10c + d) + (1000d + 100c + 10b + a) = \\ = 1001(a+d) + 110(b+c).$$

По условию она равна 11 990, т. е. $1001(a+d) + 110(b+c) = 11\,990$.

Разделив это равенство на 11 и перенеся второе слагаемое в правую часть, получим

$$91(a+d) = 10(109 - (b+c)). \qquad (*)$$

Левая часть этого равенства делится на 91, поэтому и правая часть должна делиться на 91. Но числа 10 и 91 взаимно простые, поэтому на 91 должно делиться число $109-(b+c)$. Поскольку b и c — цифры, из полученного следует, что $109-(b+c) = 91$, т. е. $b+c = 18$. Тогда $b = c = 9$ и из равенства $(*)$ получим, что $91(a+d) = 910$, т. е. $a+d = 10$. Так как $d \geqslant c = 9$, имеем $d = 9$, значит, $a = 1$.

25. Ответ: существует, например 20072007…2007 (число 2007 повторяется 223 раза).

Указание. $2007 = 9 \cdot 223$.

Существуют и другие примеры.

26. Решение. Докажем, что исходное число делится на 10, откуда будет следовать требуемое утверждение. Если последняя цифра исходного числа a не равна 0, то сумма её с последней цифрой нового числа b равна 10, а суммы цифр в остальных 2007 разрядах равны 9. Отсюда следует, что удвоенная сумма цифр числа a равна $10 + 9 \cdot 2007$, что невозможно.

27. Ответ: не существуют.

Решение. Предположим, что n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ — «удачные» числа. В записи этих чисел не может быть цифры 0, поэтому эти числа отличаются только последней цифрой, следовательно, одно из них оканчивается либо на 4, либо на 8. Пусть P — произведение первых шести цифр числа n. Так как соседние числа n и $n+1$ взаимно просты и оба делятся на P, получаем, что $P=1$. Следовательно, каждая из первых шести цифр числа n равна 1. Но число 1 111 114 не делится на 4, а число 1 111 118 не делится на 8. Получили противоречие.

28. Ответ: Коля прав.

Решение. Рассмотрим любое четырёхзначное число A, в записи которого нет ни цифры 0, ни цифры 9. Тогда число $B = 9999 - A$ также является четырёхзначным числом того же вида. В этом случае числа A и B различны, так как 9999 — нечётное число. Таким образом, все четырёхзначные числа, обладающие указанным в условии свойством, можно разбить на пары так, что сумма чисел в каждой паре будет равна 9999. Тогда сумма всех таких чисел будет кратна $9999 = 99 \cdot 101$, значит, эта сумма делится на 101.

29. Ответ: не может.

Решение. Предположим, что числа, указанные в условии, существуют. Пусть A — наименьшее среди них. Возможны два случая.

1. Число A кратно числу 111 и кратно числу 10, тогда, так как 10 и 111 — взаимно простые числа, число $\frac{A}{10}$ кратно 111 и цифры в его записи расположены в порядке убывания.

2. Число A кратно числу 111 и не кратно числу 10, тогда число $A - 111$ также кратно 111 и цифры в его записи также расположены в порядке убывания. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что число A наименьшее. Следовательно, одновременное выполнение двух условий невозможно.

Уравнения в целых числах

30. Ответ: нельзя.

Указание. Число 1 234 567 не делится на 3, поэтому ни одно из чисел a, b, $a+b$ не делится на три. Кроме того, числа a и b не могут иметь различные остатки от деления на 3, иначе $a+b$ делилось бы на 3. Остаётся рассмотреть два варианта: $a = 3k+1$, $b = 3p+1$ или $a = 3k+2$, $b = 3p+2$ — и убедиться, что они также невозможны.

31. Ответ: 189.

Решение. Пусть Вася собрал в первый день x грибов, а во второй день — y грибов, тогда Маша собрала $\frac{3}{4}x$ и $\frac{6}{5}y$ грибов соответственно. По условию $\frac{11}{10}(x+y) = \frac{3}{4}x + \frac{6}{5}y$. Решая это уравнение, получим $22x + 22y = 15x + 24y \Leftrightarrow 7x = 2y$. Из условия задачи следует, что числа x и y натуральные, причём x кратно 4, а y кратно 5. Пусть $x=4k$, $y=5n$, где $k\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{N}$. Тогда $28k=10n \iff 14k=5n$. Так как $\text{НОД}(14;5)=1$, получаем, что k кратно 5, а n кратно 14. Таким образом, среди всех $(k;n)$, удовлетворяющих полученному равенству, наименьшими являются $k=5$; $n=14$. Следовательно, $x=20$; $y=70$. Общее количество грибов: $\dfrac{7}{4}x+\dfrac{11}{5}y=35+154=189$.

Разложение на простые множители

32. Ответ: 133.

Решение. Так как $1000=5^3\cdot 2^3$, каждое из чисел в своём разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. Оба этих множителя не могут присутствовать в разложении одного числа, иначе оно будет делиться на 10. Значит, одно из чисел равно 5^3, а другое — 2^3. Тогда их сумма равна $5^3+2^3=133$.

33. Ответ: на девятую.

Указание. Так как $2007=3^2\cdot 223$, причём 223 — простое число, при разложении числа 2007! на множители 223 будет в девятой степени.

34. Ответ: нет.

Решение. Заметим, что восемь последовательных натуральных чисел дают различные остатки при делении на 8. Следовательно, среди любых восьми последовательных натуральных чисел найдётся число, которое даёт при делении на 8 остаток 4. Это число делится на 4, но не делится на 8, поэтому в разложение этого числа на простые множители двойка входит в чётной степени. Следовательно, Незнайка ошибся.

Разные задачи на делимость целых чисел

35. Ответ: 11.

Решение. Пусть у Карлсона перед обедом было n конфет. Тогда после обеда их осталось $\dfrac{55}{100}n$, а фрекен Бок нашла $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{55}{100}n=\dfrac{11n}{60}$ конфет. Так как количество конфет должно быть целым числом, $11n$ должно делиться на 60. Поскольку числа 11 и 60 взаимно простые, n должно быть кратно 60. Существует единственное число, делящееся на 60 и меньшее 111, — это число 60. Таким образом, $n=60$, значит, фрекен Бок нашла 11 конфет.

36. Ответ: 17.

Решение. Остаток при делении числа на 3 не превосходит 2, остаток при делении на 6 не превосходит 5, остаток при делении на 9 не превосходит 8. Так как сумма этих остатков равна $15=2+5+8$, они равны соответственно 2, 5 и 8. Задуманное число, увеличенное на 1, делится на 3, 6 и 9, значит, оно делится и на 18. Следовательно, задуманное Машей число при делении на 18 даёт остаток 17.

37. Ответ: 4 числа.

Решение. Примером четырёх чисел, удовлетворяющих условию задачи, служат числа 1, 3, 7, 9. Действительно, числа $1+3+7=11$, $1+3+9=13$, $1+7+9=17$, $3+7+9=19$ простые.

Предположим, что удалось выбрать пять чисел. Рассмотрим остатки этих чисел при делении на 3. Если среди остатков есть три одинаковых, то сумма соответствующих чисел делится на 3. Если же трёх одинаковых остатков нет, то каждый из остатков 1, 2 и 3 должен присутствовать (иначе, если различных остатков всего два и каждый встречается не больше двух раз, всего их не более четырёх). Найдём одно число, дающее остаток 0, одно число, дающее остаток 1, и одно число, дающее остаток 2. Их сумма делится на 3. Таким образом, из пяти натуральных чисел всегда можно выбрать три, сумма которых делится на 3. При этом она не равна 3, так как все числа различны. Значит, их сумма — составное число.

38. Ответ: 2.

Решение. Имеем $n^2+2n=(n+1)^2-1$. Следовательно, $(n+1)^2$ оканчивается на 5, т. е. и само число $(n+1)$ оканчивается на 5. Докажем, что если натуральное число p оканчивается на 5, то его квадрат оканчивается на 25. Действительно,

$$p^2=(10k+5)^2=100k^2+100k+25=(k^2+k)\cdot 100+25.$$

Из доказанного следует, что $(n+1)^2$ оканчивается на 25, значит, n^2+2n оканчивается на 24.

39. Ответ: все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

Решение. Рассмотрим сначала нечётные числа. Очевидно, что числа 1 и 3 указанным способом представить нельзя. Пусть N нечётное и $N\geqslant 5$. Тогда $N=2k+1=k+(k+1)$, где k — натуральное число и $k\geqslant 2$. Так как любые два последовательных натуральных числа взаимно просты, все указанные N удовлетворяют условию.

Рассмотрим чётные числа. Непосредственной проверкой убеждаемся, что числа 2, 4 и 6 нельзя представить в указанном виде. Остальные чётные числа можно разбить на две группы: числа, кратные 4, т. е. $N=4k$, и числа, не кратные 4, т. е. $N=4k+2$ (k натуральное и $k\geqslant 2$).

В первом случае

$$N = 4k = (2k+1)+(2k-1),$$

причём

$$\text{НОД}(2k+1;\,2k-1) = \text{НОД}(2k-1;\,2) = 1.$$

Во втором случае

$$N = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1),$$

причём

$$\text{НОД}(2k+3;\,2k-1) = \text{НОД}(2k-1;\,4) = 1.$$

Для нечётных чисел начиная с 5 *возможно также и другое представление, удовлетворяющее условию: при* $k\geqslant 2$ *имеем* $N=2k+1=$ $=2+(2k-1)$.

40. Ответ: на 3^{669}.

Решение. 1. Докажем, что среди множителей, входящих в A, нет единиц. Пусть это не так, тогда в представлении числа 2011 в виде суммы можно два слагаемых 1 и a заменить на одно слагаемое $1+a$ и произведение при этом увеличится, так как $1+a>1\cdot a$.

2. Докажем, что среди множителей, входящих в A, нет натуральных чисел, бо́льших четырёх. Действительно, если $a\geqslant 5$, то

$$2a-9>0 \iff a<3(a-3),$$

т. е., заменив слагаемое a на два слагаемых $a-3$ и 3, можно сохранить сумму и при этом увеличить произведение.

3. Если заменить число 4 на две двойки, то ни сумма, ни произведение не изменятся. Следовательно, можно считать, что среди множителей, входящих в A, четвёрок также нет. Таким образом, в произведении A встречаются только множители 2 и 3 (с какими-то показателями степеней).

4. Двоек может быть не более двух, так как $2+2+2=3+3$, но $2^3<3^2$. Значит, при замене трёх двоек на две тройки сумма не изменится, а произведение увеличится.

5. Числа 2011 и $2009=2011-2$ не кратны трём, а число $2007=$ $=2011-2-2$ кратно трём. Следовательно, число A содержит ровно две двойки. Таким образом, $A=2^2\cdot 3^{669}$.

Линейная функция и линейные уравнения

41. Ответ: например, $y=1x+20$, $y=2x+19$, …, $y=10x+11$ или $y=1x+2$, $y=3x+4$, …, $y=19x+20$. *В первом случае график каждой функции пройдёт через точку* $(1; 21)$, *а во втором случае — через точку* $(-1; 1)$.

42. Ответ: может.

Решение. Из условия задачи следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F=1{,}8T_C+32^\circ$. Если $T_F=T_C$, то $0{,}8T_C+32=0$, т. е. $T_C=-40$.

Корень уравнения можно и не находить. Достаточно заметить, что графики линейных функций с различными угловыми коэффициентами пересекаются.

Квадратичная функция и квадратные уравнения

43. Ответ: эти числа равны.

Решение. Так как графики проходят через точку $(1; 1)$, получаем, что $1=1+a+b$ и $1=1+c+d$, т. е. $a=-b$ и $c=-d$. Следовательно, $a^5=-b^5$ и $d^6=c^6$. Складывая эти равенства, получим $a^5+d^6=c^6-b^5$.

44. Ответ: не может.

Указание. Ордината вершины параболы равна $-a^2-a-1<0$.

45. Ответ: 4.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трёхчлена ($x_1<x_2$). Из условия следует, что $x_2-x_1=2$. Поскольку

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2},\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2},$$

получаем, что $x_2-x_1=\sqrt{D}$, откуда $D=4$.

46. Ответ: 2 корня.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Условие $|a+c|=|b|$ означает, что $f(-1)=a-b+c=0$ или $f(1)=a+b+c=0$. По теореме Виета находим второй корень: $-\frac{c}{a}$ или $\frac{c}{a}$ соответственно. Корни совпадать не могут, так как $a\neq c$.

47. Решение. Пусть данная прямая задана уравнением $y=kx+b$. Так как точка $A(x_3; 0)$ принадлежит этой прямой, имеем

$$0=kx_3+b \iff b=-kx_3.$$

Таким образом, уравнение данной прямой примет вид $y=k(x-x_3)$. Из условия задачи также следует, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2 = k(x - x_3) \iff x^2 - kx + kx_3 = 0.$$

Тогда, используя терему Виета, получим

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{k}{kx_3} = \frac{1}{x_3}, \quad \text{что и требовалось.}$$

48. Решение. Допустим, что $a \neq 0$. Тогда данное уравнение является квадратным, его дискриминант $D = 9 - 4pa$. Рассмотрим два случая.

1. Если $a > 0$, то при $p > \dfrac{9}{4a}$ выполняется неравенство $D < 0$, т. е. найдутся положительные значения p, при которых уравнение не имеет корней.

2. Если $a < 0$, то при любом $p > 0$ выполняется неравенство $D > 0$, но произведение корней уравнения будет равно $\dfrac{p}{a} < 0$ (по теореме Виета). Следовательно, корни уравнения имеют разные знаки, т. е. один из них отрицательный.

Так как ни один из разобранных случаев не удовлетворяет условию задачи, остаётся принять, что $a = 0$. Тогда данное уравнение является линейным и его единственный корень $x = \dfrac{p}{3} > 0$ при любом $p > 0$.

49. Ответ: $45°$.

Решение. Графиком данной функции является парабола, «ветви» которой направлены вверх (см. рис. 1 *а*, *б*). Пусть $x_1 = 1$ и x_2 — абсциссы точек пересечения графика с осью x.

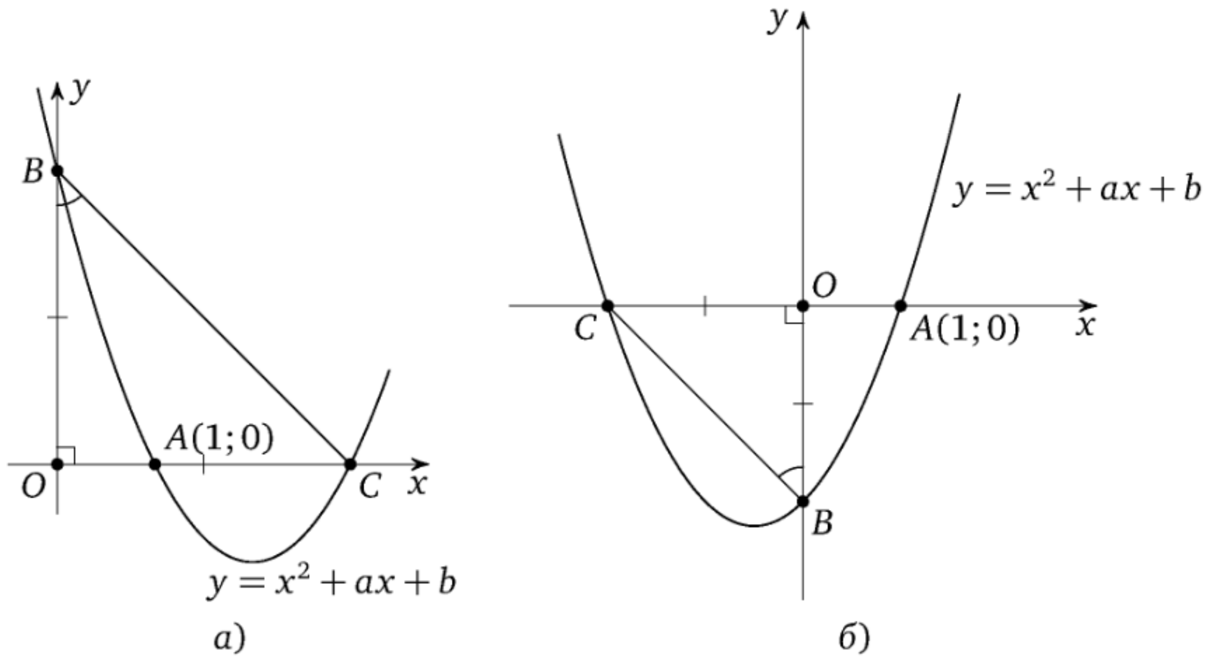


Рис. 1

Так как $y(0)=b$, имеем $B(0;b)$. Следовательно, $OC=|x_2|$, $OB=|b|$.

Треугольник CBO прямоугольный, следовательно,

$$\operatorname{tg}\angle CBO = \frac{OC}{OB} = \frac{x_2}{b},$$

так как числа x_2 и b одного знака. По теореме Виета $x_1\cdot x_2=b$, значит, $\operatorname{tg}\angle CBO=1$. Таким образом, $\angle CBO=45^\circ$.

Уравнения высших порядков и иррациональные уравнения

50. Ответ: $\dfrac{1}{\alpha}$.

Решение. Пусть α — корень уравнения $x^3+1=2004x$. Тогда α^3+ $+1=2004\alpha$, причём $\alpha\neq 0$. Следовательно, $1+\dfrac{1}{\alpha^3}=\dfrac{2004}{\alpha^2}$, а значит, $\dfrac{1}{\alpha}$ — корень уравнения $x^3+1=2004x^2$.

51. Ответ: $-1{,}5$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}),$$

справедливой при всех натуральных n. В нашем случае $a=x+1$, $b=x+2$, $n=100$.

Так как $a\neq b$ и $b-a=1$, исходное уравнение равносильно уравнению $(x+1)^{100}-(x+2)^{100}=0 \iff |x+1|=|x+2| \iff x=-1{,}5$.

52. Ответ: $x=-8$.

Решение. Пусть

$$a=\sqrt{x^2-16},\quad b=\sqrt{x^2+2x},$$

тогда $a+b=2\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Следовательно, $(a+b)^2=2(a^2+b^2)$. После преобразования получим $a^2+b^2=2ab$ и $(a-b)^2=0$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $x^2-16=x^2+2x$, откуда $x=-8$.

Доказательство неравенств

53. Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим (для трёх чисел) $2+x=1+1+x\geqslant 3\sqrt[3]{x}$. Аналогично $2+y\geqslant 3\sqrt[3]{y}$ и $2+z\geqslant 3\sqrt[3]{z}$. Осталось перемножить эти три неравенства почленно и использовать тот факт, что $xyz=1$.

54. Решение. Из условия задачи следует, что $x=1+p$, $y=1-p$, где $-1\leqslant p\leqslant 1$. Подставив эти выражения в левую часть нерaвенства, получим

$$(1+p)^2\cdot(1-p)^2\cdot\big((1+p)^2+(1-p)^2\big) = (1-p^2)^2\cdot(2+2p^2) = \\ = 2\cdot(1-p^2)\cdot(1-p^4),$$

что не превосходит 2, так как неотрицательные множители $1-p^2$ и $1-p^4$ не превосходят 1.

Тригонометрия

55. Ответ: $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Запишем второе уравнение в виде $\cos x=2\cos^2 y+1$. Тогда левая часть не превосходит единицы, а правая часть не меньше единицы. Следовательно, равенство возможно тогда и только тогда, когда $\cos y=0$ и $\cos x=1$. Значит, $|\sin y|=1$, и из первого уравнения следует, что $x=0$.

56. Ответ: 0.

Решение. Имеем

$$\sin 2010^\circ = \sin(5\cdot 360^\circ+180^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0{,}5;$$

$$\operatorname{ctg} 2010^\circ = \operatorname{ctg}(11\cdot 180^\circ+30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$(2-2\sin 2010^\circ)^{1+\sin 2010^\circ} - \operatorname{ctg} 2010^\circ = (2+1)^{1-0{,}5} - 3^{0{,}5} = 0.$$

57. Ответ: 0,5.

Решение. Используя теорему Виета, получим, что

$$\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha = 1 \iff \\ \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big) = 1 \iff x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \iff \\ \iff x = \frac{\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно, $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $c=\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Надо убедиться в том, что уравнение $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=0$ имеет корни. Это действительно так, поскольку его дискриминант $D=0$ (два совпадающих корня).

58. Ответ: $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$ больше.

Решение. Рассмотрим частное данных чисел и преобразуем его, используя формулу $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} : \frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{\sin 1^\circ\cdot\sin 4^\circ}{\sin 2^\circ\cdot\sin 3^\circ} = \frac{\cos 3^\circ-\cos 5^\circ}{\cos 1^\circ-\cos 5^\circ} < 1,$$

так как $\cos 1^\circ > \cos 3^\circ > \cos 3^\circ > 0$ (функция $y=\cos x$ убывает на $[0; 90^\circ]$). Учитывая, что данные числа положительные, получим, что $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} < \frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$.

59. Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Пусть $f(t) = t + t^3 + 2008t^5$. Эта функция возрастает, так как является суммой трёх возрастающих функций, следовательно, уравнение $f(a) = f(b)$ равносильно уравнению $a = b$. Таким образом, $\sin x = \cos 2x$. Решая это уравнение, получим

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \iff \sin x = -1 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

60. Ответ: одно.

Решение. Заметим, что все члены последовательности начиная с $\cos 1000^\circ$ равны между собой, так как разность между ними кратна 360°. Действительно, разность $10^{n+1} - 10^n = 10^n \cdot 9$ при $n \geqslant 4$ кратна 9000, а следовательно, кратна и 360. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\cos 1^\circ > 0, \quad \cos 10^\circ > 0, \quad \cos 100^\circ < 0,$$
$$\cos 1000^\circ = \cos(-80^\circ) = \cos 80^\circ > 0.$$

Таким образом, среди первых 100 членов последовательности отрицательное число одно.

61. Ответ: $\{\sqrt[3]{2}\} \cup \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Решение. Из того, что функция $y = 2^t$ возрастает, следует, что

1) если $\sin x > 0$, то $2^{\sin x} - 1 > 0$; если $\sin x < 0$, то $2^{\sin x} - 1 < 0$;

2) если $x^3 - 2 > 0$, то $2^{x^3} - 4 > 0$; если $x^3 - 2 < 0$, то $2^{x^3} - 4 < 0$.

Таким образом, если $(x^3-2)(2^{\sin x}-1) > 0$, то $(2^{x^3}-4)\sin x > 0$; если $(x^3-2)(2^{\sin x}-1) < 0$, то $(2^{x^3}-4)\sin x < 0$, т. е. знаки выражений $(x^3-2)(2^{\sin x}-1)$ и $(2^{x^3}-4)\sin x$ совпадают. Поэтому каждое слагаемое в левой части уравнения должно обращаться в нуль, т. е. данное уравнение равносильно совокупности: $x^3 = 2$ или $\sin x = 0$.

62. Решение. Докажем сначала вспомогательное утверждение: если α, β и γ — углы произвольного треугольника, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Действительно, $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) - 1 =$$
$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} - 1 + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \cos^2(\alpha+\beta) - (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) -$$
$$- \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = 0.$$

Так как данные углы острые, из доказанного утверждения следует, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 1,$$

поэтому

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) > 2.$$

Так как для любого угла x треугольника $\sin x > \sin^2 x$, получаем, что

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2, \quad \text{что и требовалось.}$$

Общие свойства функций и функциональные соотношения

63. Ответ: нет.

Решение. Пусть $f(x) = 2^x - x^3$. Эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Кроме того, $f(0) = 1 > 0$, $f(2) = -8 < 0$, $f(10) = 1024 - 1000 > 0$. Следовательно, на каждом из отрезков $[0; 2]$ и $[2; 10]$ функция $f(x)$ имеет хотя бы один корень. Значит, графики данных функций имеют не менее двух точек пересечения.

64. Ответ: верно.

Решение. При $x = 0$ получим, что

$$f(0) - (f(0))^2 \geqslant \frac{1}{4} \iff (f(0))^2 - f(0) + \frac{1}{4} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \iff f(0) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично при $x = 1$ имеем $f(1) - (f(1))^2 \geqslant \frac{1}{4} \iff f(1) = \frac{1}{2}$. Так как непрерывная функция принимает одинаковые значения на концах отрезка $[0; 1]$, внутри этого отрезка есть хотя бы одна точка максимума или точка минимума.

Отметим, что если $f(x) = \frac{1}{2}\ \forall x \in [0; 1]$ *, то любая точка этого отрезка является точкой экстремума.*

65. Ответ: $4\,052\,169$.

Решение. Запишем условие задачи в виде $f(x+1)-f(x)=2x+3$. Подставим вместо x числа $0, 1, 2, \ldots, 2011$. Получим $f(1)-f(0)=$ $=2\cdot 0+3$, $f(2)-f(1)=2\cdot 1+3$, $\ldots$, $f(2012)-f(2011)=2\cdot 2011+3$. Сложим полученные равенства почленно:

$$f(2012)-f(0)=2\cdot(1+2+\ldots+2011)+3\cdot 2012.$$

Учитывая, что

$$1+2+\ldots+2011=\frac{2012\cdot 2011}{2},$$

получим, что

$$f(2012)=1+2011\cdot 2012+3\cdot 2012=1+2\cdot 2012+2012^2=$$
$$=2013^2=4\,052\,169.$$

66. Ответ: -1.

Решение. При $y=1$ данное равенство примет вид $f(x)=f(x)+$ $+f(1)$, следовательно, $f(1)=0$. Пусть $x=2007$, $y=\frac{1}{2007}$, тогда

$$f(1)=f(2007)+f\left(\frac{1}{2007}\right), \quad \text{т. е.} \quad f(2007)=-f\left(\frac{1}{2007}\right)=-1.$$

67. Ответ: $f(x)=x^2+5x+1$.

Решение. Пусть $t=2x+1$, тогда $x=\frac{t-1}{2}$. Следовательно,

$$f(t)=4\cdot\frac{(t-1)^2}{4}+14\cdot\frac{t-1}{2}+7=$$
$$=(t-1)^2+7(t-1)+7=t^2+5t+1.$$

68. Ответ: $T=6$.

Решение. Из первого условия следует, что

$$g(x+6)=f(x+6)-(x+6)\leqslant f(x+3)+3-x-6=$$
$$=f(x+3)-(x+3)\leqslant f(x)+3-x-3=g(x).$$

Из второго условия следует, что

$$g(x+6)=f(x+6)-(x+6)\geqslant f(x+4)+2-x-6=$$
$$=f(x+4)-(x+4)\geqslant f(x+2)+2-x-4\geqslant f(x)-x=g(x).$$

Таким образом, для любого x одновременно выполняются два условия: $g(x+6)\leqslant g(x)$ и $g(x+6)\geqslant g(x)$, значит, $g(x+6)=g(x)$, т. е. функция $g(x)$ периодическая с периодом $T=6$.

Методом «от противного» можно доказать, что найденный период является наименьшим положительным.

Комбинаторная алгебра

69. Ответ: 20 или 1.

Решение. Заметим, что могли стереть как наименьшее из записанных чисел, так и наибольшее. Действительно, в первом случае среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{2+20}{2}\cdot 19:19=11$, а во втором случае оно равно $\frac{1+19}{2}\cdot 19:19=10$. При стирании любого другого числа среднее арифметическое оставшихся чисел будет больше 10, но меньше 11, т. е. не будет целым. Таким образом, никакое другое число не могло оказаться стёртым.

70. Ответ: 17 км.

Решение. Пусть на кольцевой дороге $2n$ столбов. Вычислим сумму расстояний от синего столба до всех остальных:

$$2(1+2+\ldots+(n-1))+n=n(n-1)+n=n^2 \text{ км.}$$

Следовательно, $n^2>2008$. Так как расстояние от синего столба до жёлтого не превосходит n, получаем, что $n^2-n\leqslant 2008$, т. е. $n(n-1)\leqslant$ $\leqslant 2008$. Заметим, что $44^2<44\cdot 45<2008<45^2<45\cdot 46$. Поэтому единственное натуральное число, удовлетворяющее обоим неравенствам, — это $n=45$. Тогда $n^2=2025$, а расстояние от синего столба до жёлтого равно $2025-2008=17$ км.

Геометрия

Наглядная и комбинаторная геометрия

71. Ответ: см. рис. 2.

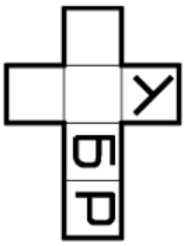
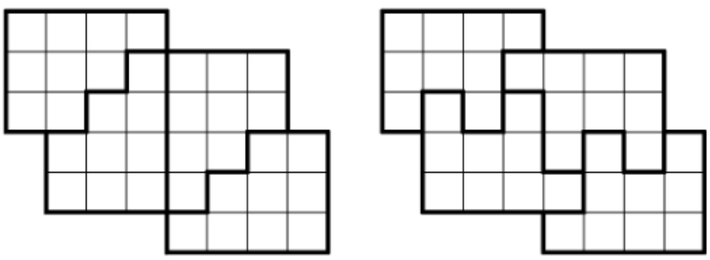


Рис. 2

72. Ответ: например, см. рис. 3 *а* или рис. 3 *б*.



а) *б*)

Рис. 3

73. Ответ: см. рис. 4 (*четыре точки в вершинах квадрата и ещё две точки в вершинах равносторонних треугольников*).

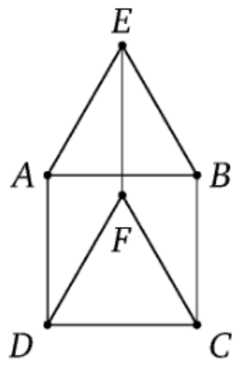


Рис. 4

74. Ответ: прямоугольный с углом 30°.

Решение. Если в таком треугольнике провести медиану к гипотенузе, то он разобьётся на тупоугольный равнобедренный и остроугольный равносторонний треугольники. При этом исходный треугольник является прямоугольным и разносторонним.

75. Указание. Можно нарисовать 4 разных маршрута.

76. Решение. Каждая часть будет состоять из одного из приклеенных кубов и правильной четырёхугольной пирамиды, вершина которой в центре исходного куба, а основание — одна из его граней.

77. Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что это возможно и сумма векторов при некотором расположении стрелок равна $\vec{0}$. Тогда проекция суммы получившихся векторов на любую прямую должна также равняться $\vec{0}$. Спроецируем её на прямую m, содержащую какую-нибудь высоту тетраэдра. Проекция суммы векторов основания на m будет равна $\vec{0}$, так как эти векторы лежат в плоскости, перпендикулярной m, а проекция трёх остальных на m не равна $\vec{0}$. Следовательно, при любом расположении стрелок сумма всех шести векторов не равна $\vec{0}$.

78. Ответ: может.

Указание. У внешней пирамиды три вершины A, B и C надо расположить «близко» друг от друга, а четвёртую вершину D — «далеко» от них. У внутренней пирамиды вершины A_1 и B_1 надо расположить рядом с вершинами A, B и C, а вершины C_1 и D_1 — рядом с вершиной D (см. рис. 5).

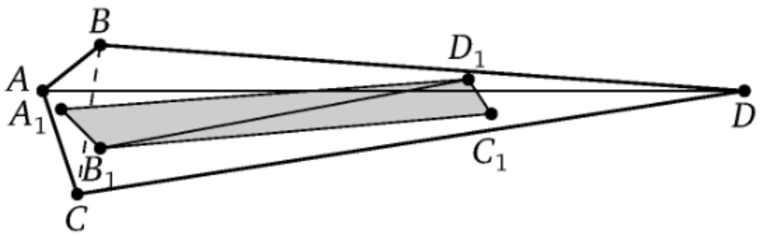


Рис. 5

Простая планиметрия

79. Ответ: не может.

Решение. Предположим, что требуемая конструкция построена (см. рис. 6). Рассмотрим треугольник ABE: BD — его медиана.

Если $\angle ABD = \angle DBE$, то BD является также и биссектрисой этого треугольника, поэтому ΔABE равнобедренный с основанием AE, а BD — его высота. Аналогично BE — высота равнобедренного треугольника DBC. Таким образом, из точки B опущено два различных перпендикуляра на прямую AC, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра к прямой.

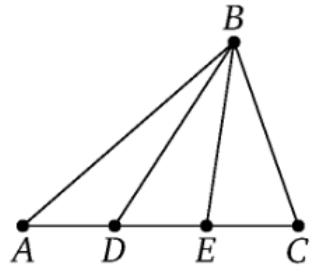


Рис. 6

80. Ответ: $110°$.

Решение. Продлим медиану BM за точку M на её длину и получим точку D (см. рис. 7). Так как $AB = 2BM$, получаем, что $AB = BD$, т. е. треугольник ABD равнобедренный. Следовательно, $\angle BAD = \angle BDA = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

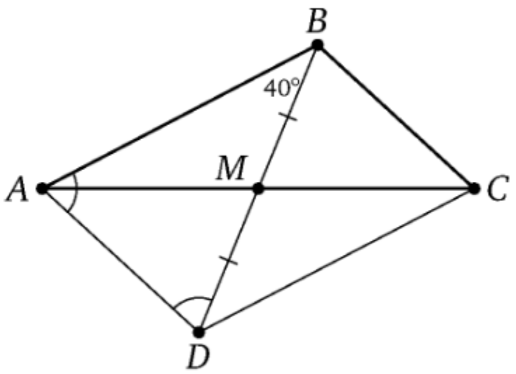


Рис. 7

Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\angle CBD = \angle ADB = 70°$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 110°$.

81. Ответ: $BK : PM = 2$.

Решение. Проведём через точку M прямую, параллельную CK, которая пересечёт AB в точке D (см. рис. 8). Тогда $BD = KD$ (по тео-

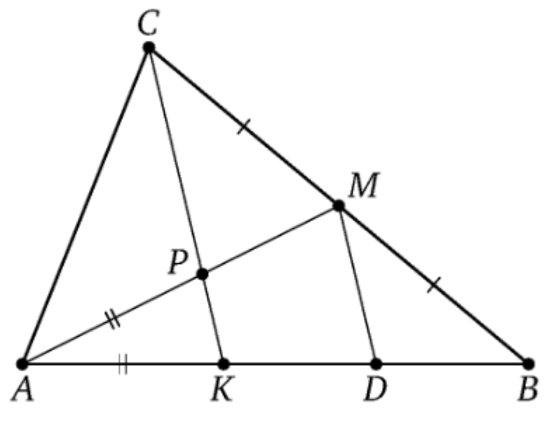


Рис. 8

реме Фалеса). Кроме того, $\angle MDA = \angle PKA = \angle KPA = \angle DMA$, значит, $AD = AM$. Учитывая, что $AK = AP$, получим $PM = KD = \frac{1}{2}BK$.

82. Ответ: 72°.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD и BC — её основания ($AD > BC$), $AB \perp AD$. Тогда $CD > AB$ и $\angle ADC$ — искомый острый угол (см. рис. 9). Пусть M — середина CD, тогда M лежит на средней линии трапеции, которая является серединным перпендикуляром к стороне AB, поэтому $AM = MB$. Так как треугольник BCM равнобедренный, а угол BCM тупой, получим, что $BC = CM = MD$. Треугольник AMD равнобедренный и $AD > BC$, следовательно, $AD = AM$.

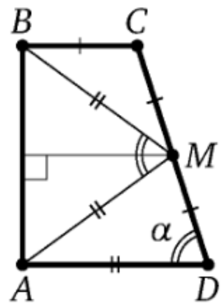


Рис. 9

Пусть $\angle ADM = \angle AMD = \alpha$, тогда

$$\angle BCM = 180^\circ - \alpha; \quad \angle BMC = \angle MBC = 0{,}5\alpha;$$
$$\angle ABM = \angle BAM = 90^\circ - 0{,}5\alpha; \quad \angle AMB = \alpha.$$

Таким образом, $\alpha + \alpha + 0{,}5\alpha = 180^\circ$, значит, $\alpha = 72^\circ$.

83. Решение. Продолжим боковые стороны AB и DC до их пересечения в точке M (см. рис. 10). Тогда BC — средняя линия треугольника AMD (так как $BC \parallel AD$ и $BC = 0{,}5AD$), а EC — медиана прямоугольного треугольника MED, проведённая к гипотенузе, следовательно, $CE = MC = CD$, что и требовалось.

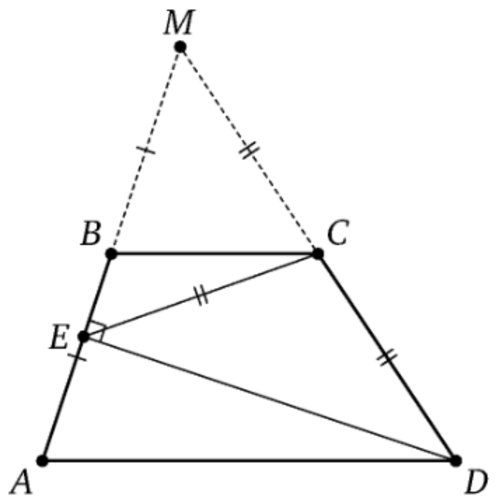


Рис. 10

84. Ответ: $2:1$.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Из условия задачи следует, что $AB = AO = OC = CD$ (см. рис. 11). Так как $\angle KDB = \angle BDA = \angle DBK$, получаем, что $BK = KD$,

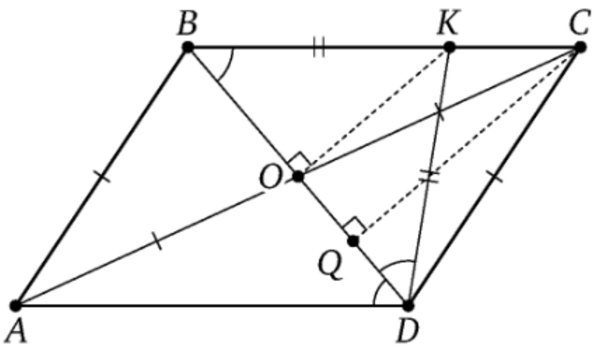


Рис. 11

поэтому медиана KO треугольника BKD является его высотой. Так как $OC = CD$, медиана CQ треугольника OCD также является его высотой. Таким образом, $CQ \parallel KO$, тогда по теореме о пропорциональных отрезках (*или из подобия треугольников BOK и BQC*) получим, что $BK : KC = BO : OQ = 2 : 1$.

85. Ответ: $\angle CBF = 45°$.

Решение. В четырёхугольнике $BCFE$ имеем $\angle BCF = \angle BEF = 90°$ (см. рис. 12), следовательно, около него можно описать окружность. Тогда $\angle CBF = \angle CEF$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). В равнобедренном прямоугольном треугольнике ADE имеем $\angle DEC = 45°$, следовательно, $\angle CEF = 90° - \angle DEC = 45° = \angle CBF$.

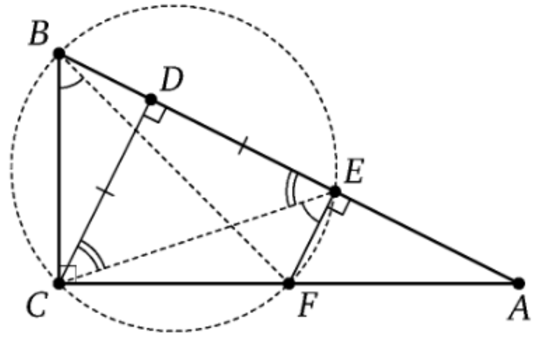


Рис. 12

86. Ответ: 1.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция: $AD = 2$; $AB = BC = CD = 1$ и O — середина AD (см. рис. 13). Тогда $ABCO$ и $DCBO$ — параллелограммы, значит, $OC = AB = 1$ и $OB = CD = 1$. Следовательно, точка O удалена от точек A, B, C и D на расстояние 1, т. е. она является центром окружности, описанной около трапеции.

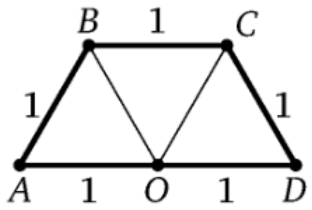


Рис. 13

Данная трапеция является половиной правильного шестиугольника со стороной 1, *вписанного в окружность радиуса* 1.

87. Решение. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 120^\circ + \alpha$ (см. рис. 14). Тогда $\angle C = 60^\circ - 2\alpha$. Если CL — биссектриса данного треугольника, то

$$\angle CLA = \angle LCB + \angle LBC = (30^\circ - \alpha) + \alpha = 30^\circ.$$

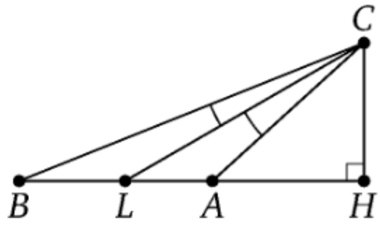


Рис. 14

Пусть CH — высота треугольника ABC, тогда в прямоугольном треугольнике CLH катет CH, лежащий против угла 30°, в два раза меньше, чем гипотенуза CL.

88. Ответ: острые углы трапеции и ромба равны.

Решение. Так как в многоугольник можно вписать окружность, его площадь вычисляется по формуле $S = p \cdot r$ (произведение полупериметра на радиус окружности). Отсюда следует, что периметры ромба и окружности равны. Кроме того, в описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны друг другу, и, так как трапеция равнобедренная, сторона ромба равна боковой стороне трапеции. Пусть их длина равна a, и пусть α и β — острые углы трапеции и ромба. Поскольку высоты ромба и трапеции равны $2r$, получаем, что $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$ и $\sin\beta = \frac{a}{2r}$. Эти углы острые, следовательно, $\alpha = \beta$.

89. Ответ: 7.

Решение. Соединим точки B_1 и A, C_1 и B, A_1 и C (см. рис. 15). Площади треугольников ABC и C_1AB равны, так как у них равны основания AC_1 и AC и высота, проведённая из вершины B, общая. Аналогично равны площади треугольников ABC и A_1BC, ABC и B_1AC. Площади треугольников ABC_1 и BA_1C_1 равны, так как у них рав-

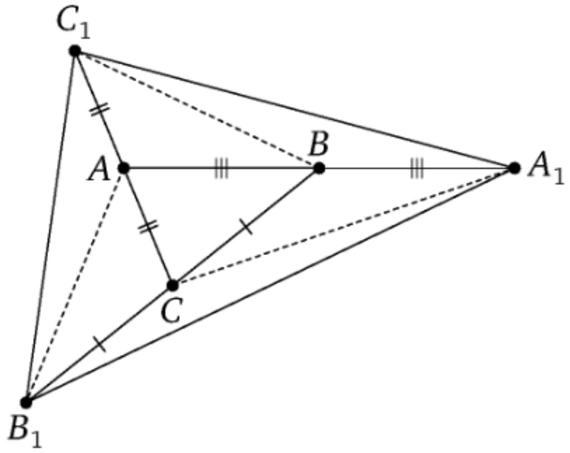


Рис. 15

ны основания AB и BA_1 и высота, проведённая из вершины C_1, общая. Аналогично равны площади треугольников ACB_1 и AC_1B_1, CBA_1 и CB_1A_1. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ разбит на 7 треугольников площади 1.

90. Ответ: $4S$.

Решение. Воспользуемся тем, что отношение площадей треугольников, высота которых одинаковы, равно отношению длин их оснований. Значит,

$$S_{\Delta PMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta APC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$$

(см. рис. 16).

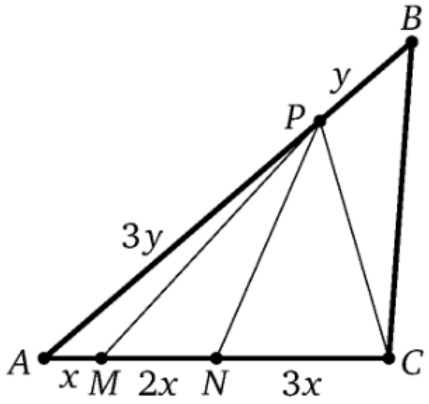


Рис. 16

91. Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть $AM=m$ — медиана треугольника ABC, p_1 и r — полупериметр и радиус окружности, вписанной в треугольник ACM, а p_2 и $2r$ — полупериметр и радиус окружности, вписанной в треугольник ABM (см. рис. 17). Площади треугольников ABM и ACM равны, следовательно, $p_1\cdot r=p_2\cdot 2r$, т. е. $p_1=2p_2$. Получим

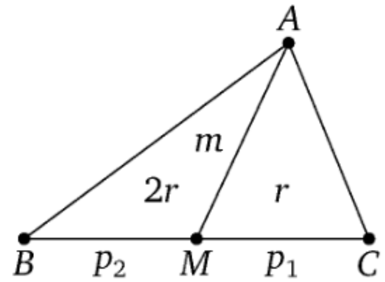


Рис. 17

$$\frac{m+AC+CM}{2}=m+AB+BM.$$

Так как $BM=CM$, имеем $AC=m+2AB+CM>m+CM$. Это противоречит неравенству треугольника для $\Delta AI'C: AC<m+CM$.

92. Ответ: $\frac{2m\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Пусть точки P и Q — середины сторон AC и BC соответственно, M — точка пересечения медиан, тогда PQ — средняя линия треугольника ABC (см. рис. 18). Точка D пересечения PQ и CM делит отрезок PQ пополам. Кроме того, $CM=\frac{2m}{3}$, $CD=\frac{m}{2}$, значит, $DM=\frac{m}{6}$. Из условия задачи (по свойству пересекающихся хорд окружности) следует, что $DP\cdot DQ=DC\cdot DM$. Пусть $DP=DQ=x$, тогда $x^2=\frac{m^2}{12}$, т. е. $x=\frac{m}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $AB=4x=\frac{2m\sqrt{3}}{3}$.

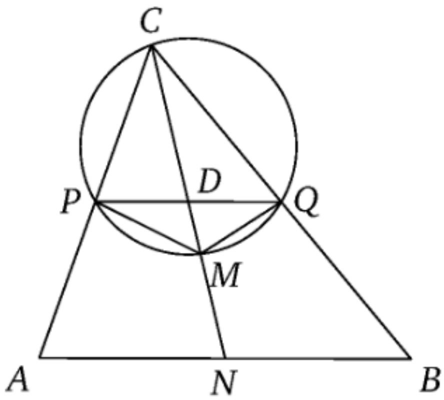


Рис. 18

93. Ответ: $AP:CP=2:3$.

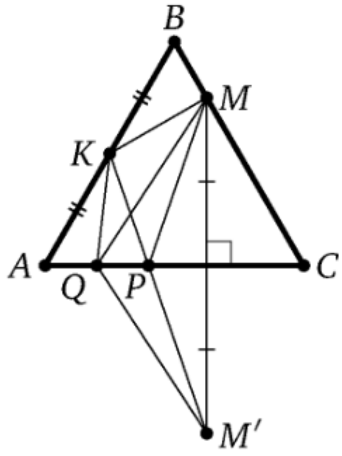


Рис. 19

Решение. Так как отрезок KM зафиксирован, периметр треугольника PKM наименьший из возможных тогда и только тогда, когда длина ломаной KPM наименьшая из возможных (см. рис. 19). Для того чтобы построить точку P, удовлетворяющую условию, достаточно рассмотреть точку M', симметричную точке M относительно прямой AC. Тогда P — точка пересечения KM' и AC. Действительно, длина ломаной KPM равна $KP+PM=KP+PM'=KM'$. Для любой точки Q отрезка AC, отличной от P, имеем $KQ+QM=KQ+QM'>KM'$. Так как $\angle MPC=\angle M'PC=\angle KPA$, треугольники MPC и KPA подобны (по двум углам). Следовательно, $AP:CP=AK:CM=\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=2:3$.

Более сложная планиметрия

94. Ответ: $BE=2$.

Решение. Продолжим прямую ED до пересечения со стороной AB в точке F (см. рис. 20). Тогда в треугольнике EBF биссектриса BD является высотой, следовательно, этот треугольник равнобедренный: $BE=BF$.

Проведём отрезок DG, параллельный BC (точка G лежит на стороне AB). Так как $\angle DCB=\angle GBC$, трапеция $CDGB$ является равнобокой, т. е. $BG=DC=1$.

В треугольнике BEF отрезок DG делит пополам сторону EF и параллелен стороне BE. По теореме Фалеса DG — средняя линия треугольника BEF. Следовательно, $BE=BF=2BG=2$.

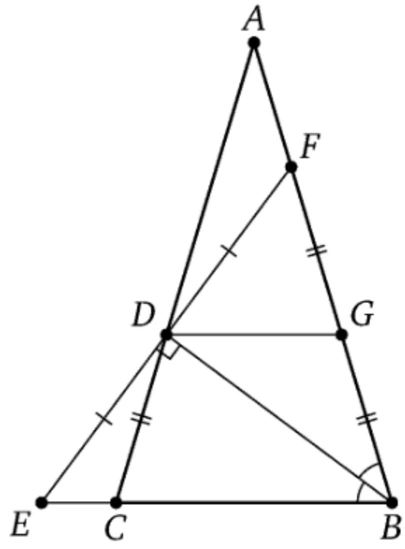


Рис. 20

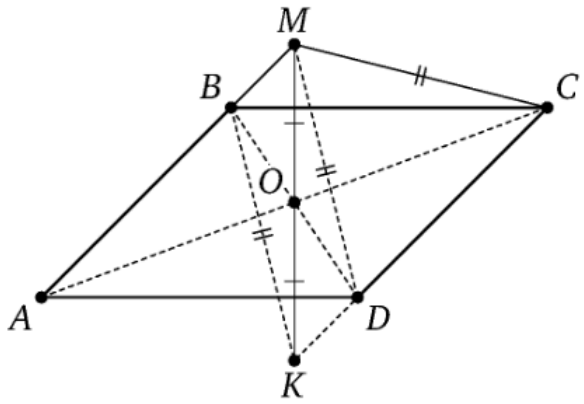


Рис. 21

95. Решение. Продолжим отрезок MO за точку O на его длину и получим точку K (см. рис. 21). Тогда $BMDK$ — параллелограмм (по признаку), следовательно, $DK \parallel AB$, поэтому точка K лежит на прямой CD. По свойству параллелограмма $MD = BK$. Кроме того, $MC = MD$, значит, $BMCK$ — равнобокая трапеция. Следовательно, $\angle BMK = \angle MBC$. Тогда $\angle AMO = \angle MBC = \angle MAD$, что и требовалось.

96. Решение. Пусть K и M — середины сторон BD и BC соответственно (см. рис. 22). Тогда по теореме о средней линии треугольника $KM \parallel DC$ и $KM = \frac{1}{2}DC$, т. е. $KM \parallel AD$ и $KM = AD$. Это означает, что $AKMD$ — параллелограмм, значит, $AK = DM$. Эти отрезки — искомые медианы равной длины.

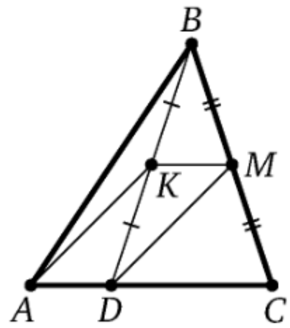


Рис. 22

97. Решение. Продлим отрезок MK за точку K на его длину и получим точку P (см. рис. 23). Из равенства треугольников BKP и AMK (либо из того, что $APBM$ — параллелограмм) получим, что $BP = AM$ и $BP \parallel AM$. Так как $BP \parallel AM$, имеем $BP \perp BN$. В треугольнике MPN отрезок NK является высотой и медианой, следовательно, этот треугольник равнобедренный: $NP = MN$. Таким образом, прямоугольный треугольник NBP искомый. Действительно, его стороны $BP = AM$, BN и $NP = MN$.

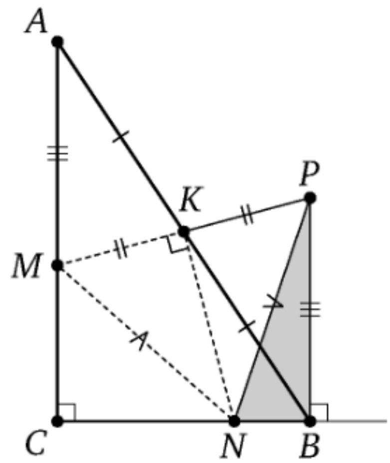


Рис. 23

98. Решение. Пусть O — точка пересечения AC и BD (см. рис. 24). Тогда треугольники ABC и BOC подобны (по двум углам). Следовательно, $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{OC}$, откуда $BC^2 = AC \cdot OC$.

Аналогично из подобия треугольников ACD и ADO получим равенство $\frac{AC}{AD}=\frac{AD}{AO}$, т. е. $AD^2=AC\cdot AO$. Сложим полученные равенства:

$$BC^2+AD^2=AC\cdot OC+AC\cdot AO=AC^2.$$

Следовательно, из отрезков BC, AD и AC можно сложить прямоугольный треугольник (по теореме, обратной теореме Пифагора).

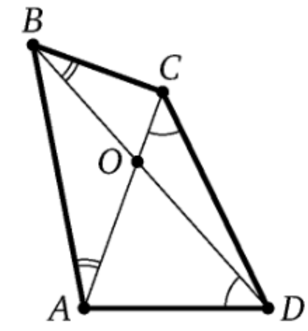


Рис. 24

98. Ответ: $\angle ADB=45^\circ$.

Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в пятиугольник (см. рис. 25). Проведём перпендикуляры OK, OL, OM, ON и OT к сторонам AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Так как проведённые отрезки являются радиусами вписанной окружности, четырёхугольники $AKOT$, $KBLO$ и $OMDN$ — равные квадраты. Диагонали OA, OB и OD этих квадратов равны, поэтому O — центр окружности, описанной около треугольника ADB. Следовательно, $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB=45^\circ$.

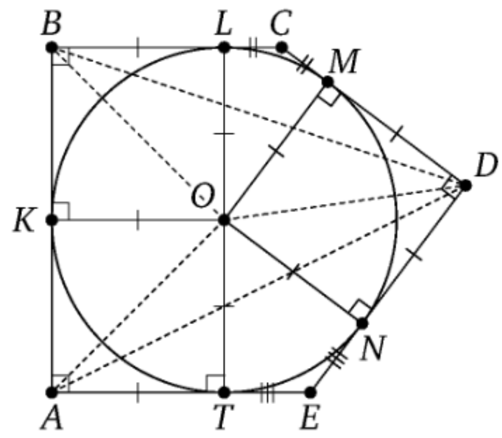


Рис. 25

100. Решение. Докажем, что $\angle ALP=\angle LAP$, из чего и будет следовать утверждение задачи (см. рис. 26). Обозначим $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, тогда $\angle C=180^\circ-(2\alpha+2\beta)$. Так как треугольник KCL равнобедрен-

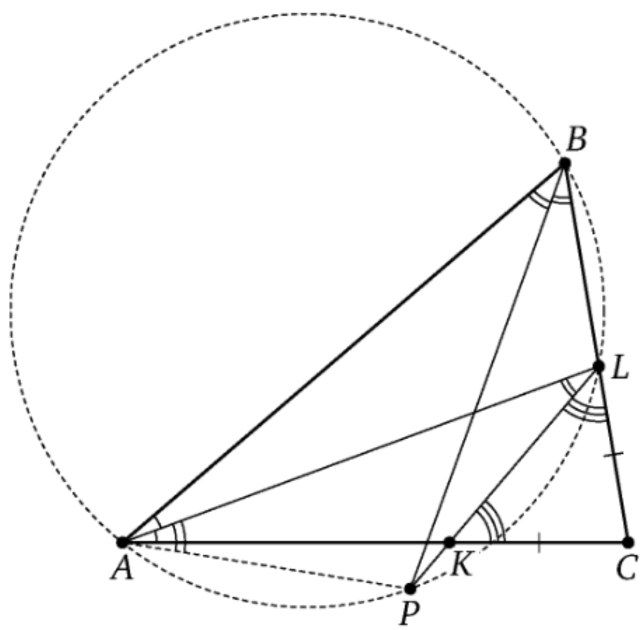


Рис. 26

ный, $\angle KLC=\angle LKC=\alpha+\beta$. Для треугольника ALK угол LKC внешний, поэтому $\angle LKC=\angle LAK+\angle ALK$, следовательно, $\angle ALK=\beta$. Таким образом, $\angle ALD=\angle ABP$, значит, четырёхугольник $ABLP$ вписанный. Тогда из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle LAP=\angle LBP=\beta=\angle ALP$.

101. Решение. Так как четырёхугольник $MBCN$ вписанный, имеем $\angle MBC=\angle MND$ (см. рис. 27). Поскольку $ABCD$ — трапеция, $\angle MBC+$ $+\angle MAD=180^\circ$. Следовательно, $\angle MND+\angle MAD=180^\circ$, поэтому четырёхугольник $MADN$ также вписанный, значит, $\angle TND=\angle TMA$. Кроме того, вписанными являются четырёхугольники $TBCN$ и $TCBM$, значит, $\angle TBC=\angle TND$ и $\angle TCB=\angle TMA$. Таким образом, $\angle TBC=\angle TCB$, откуда $TB=TC$, что и требовалось.

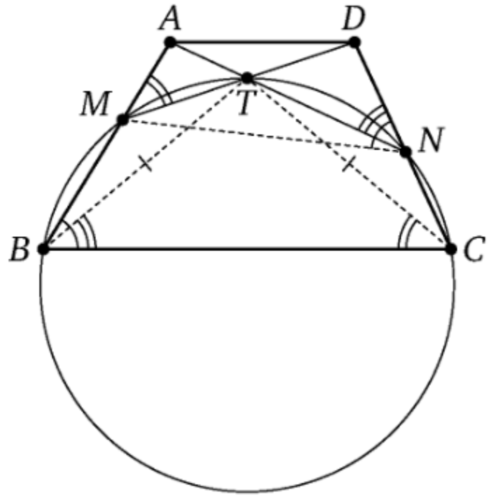


Рис. 27

102. Решение. Заметим сначала, что $AP=AQ$ (см. рис. 28). Действительно, из условия следует, что $\angle PTA=\angle QTC$ и $\angle TAP=\angle TCQ$ (*угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опираю-*

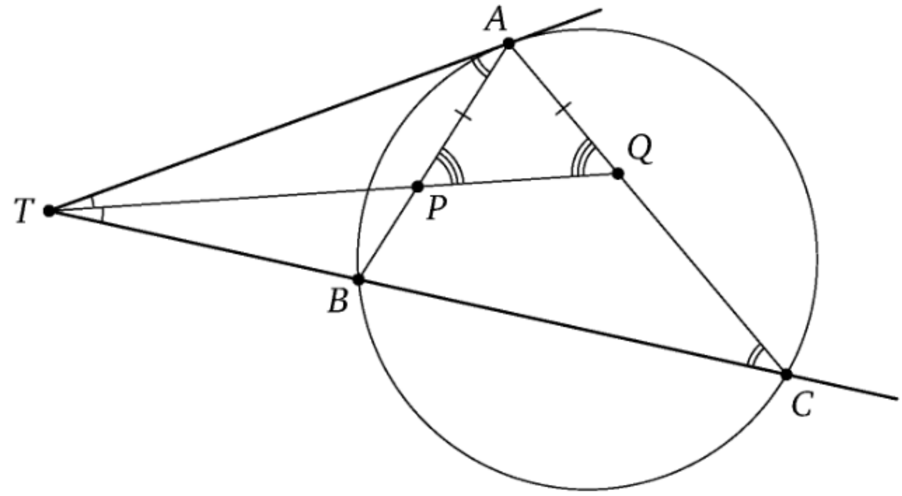


Рис. 28

щемуся на ту же дугу). Но $\angle APQ = \angle PTA + \angle TAP$ (*внешний угол треугольника* TPA), $\angle AQP = \angle QTC + \angle TCQ$ (*внешний угол треугольника* TQC). Следовательно, $\angle APQ = \angle AQP$, т. е. треугольник APQ равнобедренный: $AP = AQ$.

По *основному свойству биссектрисы*, применённому к треугольникам TAB и TAC, получим $\frac{AP}{PB} = \frac{TA}{TB}$ и $\frac{AQ}{QC} = \frac{TA}{TC}$. Перемножив почленно эти равенства, получим, что

$$\frac{AP \cdot AQ}{PB \cdot QC} = \frac{TA^2}{TB \cdot TC}.$$

Используя теорему о касательной и секущей: $TA^2 = TB \cdot TC$ и учитывая, что $AP = AQ$, получим $\frac{AP^2}{PB \cdot PC} = 1$, т. е. $AP = \sqrt{PB \cdot QC}$.

103. Ответ: угол AEB прямой.

Решение. Заметим, что угол CED прямой, так как он опирается на диаметр полуокружности (см. рис. 29). Следовательно,

1) $ME^2 = CM \cdot MD$ (*свойство высоты прямоугольного треугольника*);

2) $CM \cdot MD = AM \cdot MB = AM^2$ (*пропорциональные отрезки в круге*).

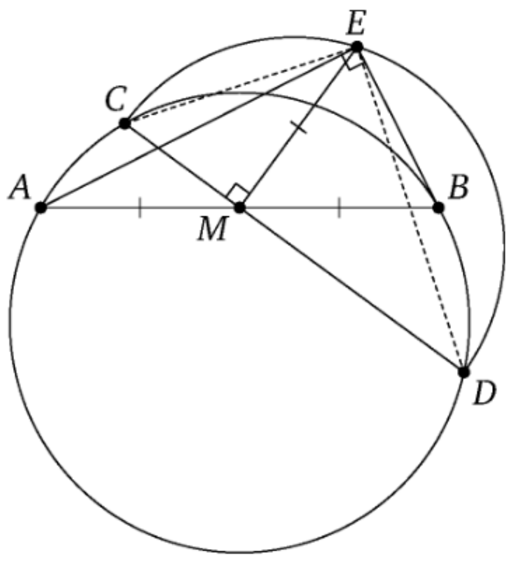


Рис. 29

Получим $ME = AM$ и $ME = AM = BM$, следовательно, угол AEB прямой.

104. Решение. Пусть точка T не лежит на отрезке AD. Тогда прямая CT пересекает AD в некоторой точке K, а прямая BT пересекает AD в точке P (см. рис. 30). Используя тот факт, что CA — биссектриса угла ACK, и свойство углов, вписанных в окружность, получим $\angle ACK = \angle BCA = \angle BDA$, следовательно, около четырёхугольни-

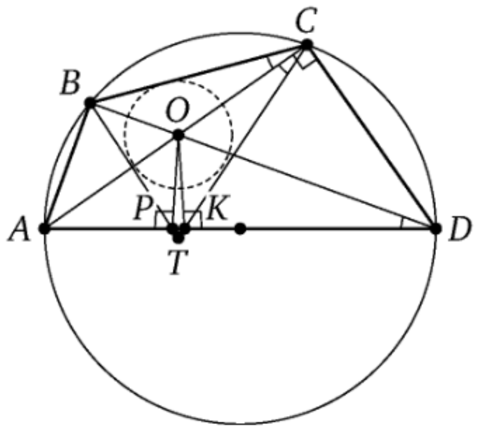


Рис. 30

ка $OCDK$ можно описать окружность. При этом угол OCD прямой (*вписанный и опирается на диаметр* AD). Значит, и угол OKD также прямой. Аналогично доказывается, что угол OPA прямой. Таким образом, через точку O проходят два перпендикуляра к одной прямой AD, что невозможно. Значит, точки P и K совпадают с точкой T, что и требовалось.

105. Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, C_1 и A_1 — середины сторон AB и BC соответственно, тогда OC_1 и OA_1 — серединные перпендикуляры к этим сторонам (см. рис. 31 *а*). Так как отрезок OB виден из точек C_1 и A_1 под углом 90°, эти точки лежат на окружности с диаметром OB. Таким образом, мы доказали, что четыре из пяти указанных в условии задачи точек лежат на одной окружности, не используя условия $AC = \dfrac{AB+BC}{2}$. Покажем теперь, что если это условие выполняется, то на рассматриваемой окружности лежит также и точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

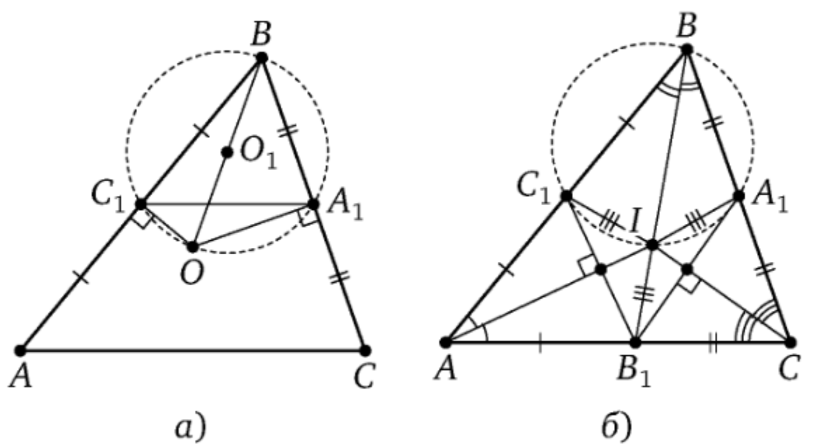


Рис. 31

Пусть BB_1 — биссектриса треугольника ABC, тогда $\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{AB}{BC}=$ $=\frac{AC_1}{CA_1}$ (см. рис. 31 *б*). Учитывая, что $AC=\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}=AC_1+CA_1$, получим, что $AC_1=AB_1$ и $CA_1=CB_1$.

Поскольку AI — биссектриса угла A, она совпадает с высотой и медианой равнобедренного треугольника AB_1C_1, поэтому треугольник IB_1C_1 также равнобедренный, т. е. $IC_1=IB_1$. Аналогично доказывается, что $IA_1=IB_1$. Таким образом, $IC_1=IA_1$.

Итак, в треугольниках BIC_1 и BIA_1 сторона BI общая, $\angle C_1BI=$ $=\angle A_1BI$, $IC_1=IA_1$. Следовательно,

$$\angle BC_1I=\angle BA_1I \quad \text{или} \quad \angle BC_1I+\angle BA_1I=180^0.$$

Первый случай реализуется, если $BC_1=BA_1$, т. е. треугольник ABC равносторонний. Тогда центры его описанной и вписанной окружностей совпадают. Во втором случае четырёхугольник BC_1IA_1 является вписанным, что и требовалось.

106. Ответ: $7:8$.

Решение. Продолжим боковые стороны трапеции $ABCD$ до пересечения — точки N (см. рис. 32). Заметим, что треугольник AND равнобедренный, так как в нём биссектриса DM является одновременно высотой. Следовательно, отрезок DM — медиана треугольника AND, а значит, $BM=BN=$ $=\frac{1}{4}AN$. Площади треугольников AMD и MND равны половине площади треугольника AND. Так как треугольник BNC подобен треугольнику AND с коэффициентом $k=\frac{1}{4}$, его площадь составляет $\frac{1}{16}$ от площади треугольника AND, а площадь четырёхугольника $MBCD$ составляет $\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ треугольника AND. Таким образом, отношение площадей четырёхугольника $MBCD$ и треугольника AMD равно $\frac{7}{16}:\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$.

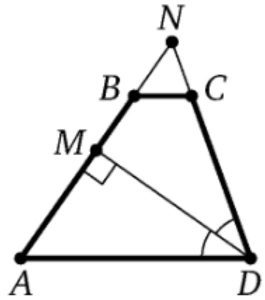


Рис. 32

107. Ответ: так расположить точки нельзя.

Решение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC с точками E и F на сторонах AC и BC. Пусть C' — образ точки C, а F' — образ точки F при симметрии с центром в точке D (см. рис. 33). Тогда четырёхугольник $ACBC'$ — параллелограмм, а точка F' лежит на его стороне AC'. Так как $\angle EAF'=\angle EAB+\angle BAF'=\angle CAB+\angle CBA<180°$, четырёхугольник $AEDF'$ выпуклый (это следует также из того, что EAF — угол параллелограмма). Треугольники $AF'D$ и BFD равны,

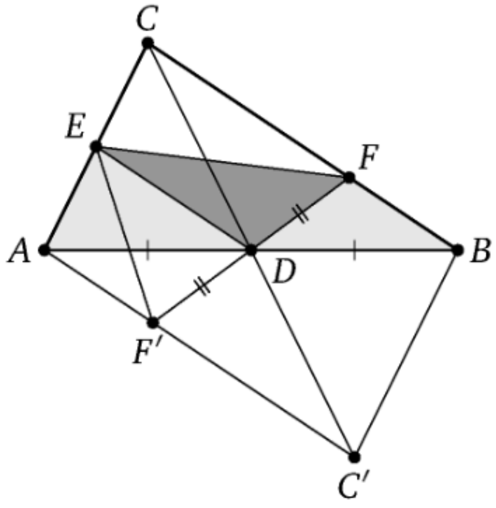


Рис. 33

значит, $S_{AEDF'} = S_{AED} + S_{AF'D} = S_{AED} + S_{BFD}$. Кроме того, так как D — середина отрезка FF', получаем, что $S_{DEF} = S_{DEF'}$. Так как $S_{AEDF'} > S_{DEF'}$, имеем $S_{AED} + S_{BFD} > S_{DEF}$, следовательно, указанным образом расположить точки невозможно.

Стереометрия

108. Решение. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Следовательно, $CE = 0{,}5AB = DE$, т. е. треугольник CED равнобедренный (см. рис. 34). Поскольку M и N — точки пересечения медиан граней ABC и ABD, имеем $EM : MC = EN : ND = 1 : 2$, значит, $EM = EN$. Тогда треугольники CEN и DEM равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $DM = CN$, что и требовалось доказать.

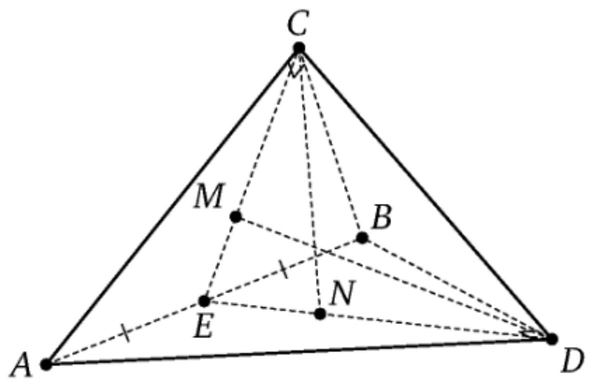


Рис. 34

109. Ответ: все вершины куба, кроме концов этой диагонали.

Решение. Рассмотрим одну из диагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, например A_1C (см. рис. 35). Заметим, что диагональ A_1C видна из любой вершины куба (кроме точек A_1 и C) под прямым углом (*это*

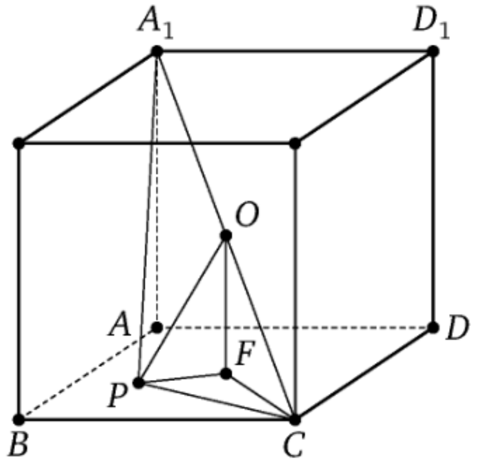


Рис. 35

следует из теоремы о трёх перпендикулярах или из теоремы, обратной теореме Пифагора). Докажем, что из других точек поверхности куба эта диагональ видна под тупым углом. Пусть F — центр грани $ABCD$, являющийся проекцией середины O диагонали A_1C на грань $ABCD$. Так как $FP < FC$, по свойству наклонных и их проекций $OP < OC = \frac{1}{2}A_1C$. Докажем, что угол A_1PC *тупой*. Построим в плоскости A_1PC окружность на отрезке A_1C как на диаметре, тогда из доказанного неравенства следует, что точка P лежит внутри этой окружности, а из точек, лежащих внутри окружности, диаметр виден под тупым углом, что и требовалось.

110. Ответ: эти расстояния равны.

Решение. Пусть прямые C_1O и A_1A до пересекаются в точке A_2, следовательно, плоскость C_1BD пересекает прямую A_1A в точке A_2

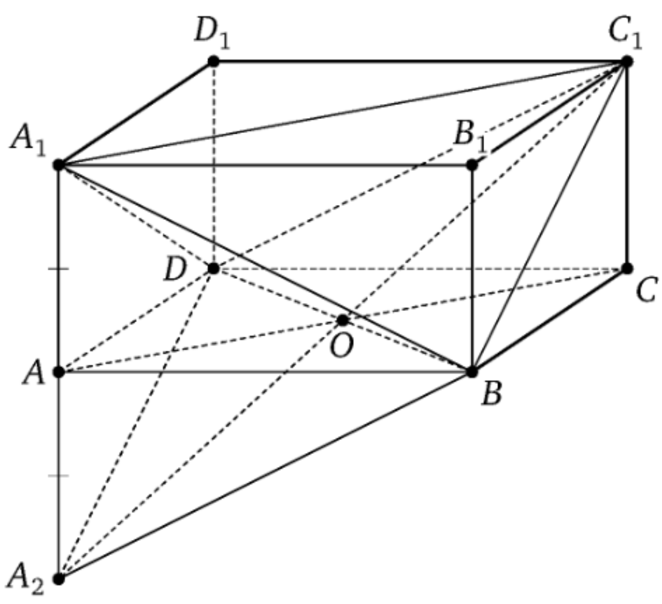


Рис. 36

(см. рис. 36). Отрезок AO равен половине A_1C_1, $AO \parallel A_1C_1$. Следовательно, в треугольнике $A_1A_2C_1$ отрезок AO является средней линией, откуда $A_1A = AA_2$. Точки A_1 и A_2 симметричны относительно плоскости ABC, следовательно, тетраэдры AA_1BD и AA_2BD, а также их высоты симметричны относительно плоскости ABC. Расстояния от точки A до плоскостей A_1BD и C_1BD равны длинам высот тетраэдров AA_1BD и AA_2BD, проведённых из точки A. Следовательно, расстояния от A до плоскостей A_1BD и C_1BD равны.

111. Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$. Пусть сечение, описанное в условии, проходит через вершину D и пересекает рёбра AB и BC в точках M и N соответственно. Рассмотрим развёртку $D_2AD_1CD_3B$ этого тетраэдра на плоскость треугольника ABC (см. рис. 37). Так как в правильном тетраэдре все плоские углы при вершинах A, B и C равны по $60°$, точки A, B и C лежат на отрезках D_1D_2, D_2D_3 и D_1D_3 соответственно и являются их серединами. Тогда $P = DM + MN + DN = D_2M + MN + ND_3 > D_2D_3 = 2a$, что и требовалось.

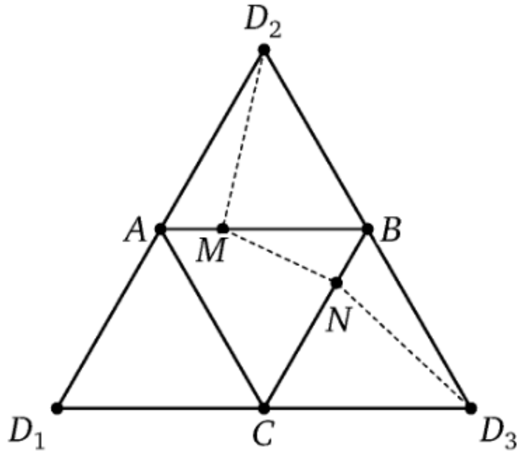


Рис. 37

Отметим, что указанным свойством обладает не только развёртка правильного тетраэдра, но и развёртка любого равногранного тетраэдра (т. е. тетраэдра, у которого все грани — равные между собой треугольники).

112. Ответ: $2\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Решение. Из условия задачи следует, что в данный конус может быть вписана треугольная пирамида $PABC$, у которой равны боковые рёбра PA, PB и PC и все плоские углы при вершине P прямые (см. рис. 38). Следовательно, эта пирамида правильная, и её высотой является отрезок PO, где O — центр основания конуса. Тогда ис-

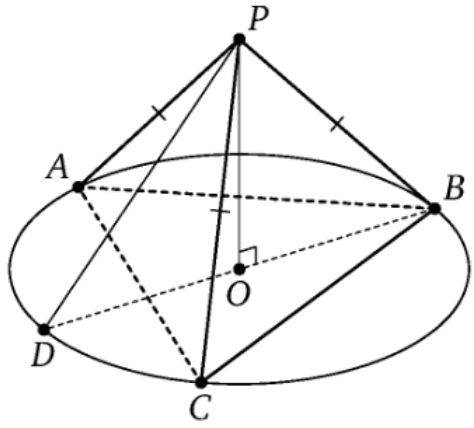


Рис. 38

комый угол BPD вдвое больше угла BPO. Пусть $PB = b$, тогда

$$BC = b\sqrt{2}; \quad OB = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = \frac{b\sqrt{6}}{3};$$

$$\sin\angle BPO = \frac{OB}{PB} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \angle BPD = 2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Если вычислять искомый угол по теореме косинусов из треугольника BPD, то ответ можно получить в другом виде:

$$\angle BPD = \arccos\frac{2PB^2 - BD^2}{2PB^2} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{3}.$$

В любом случае искомый угол тупой.

113. Ответ: $\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$.

Решение. Пусть PO — перпендикуляр к данной плоскости; PA, PB и PC — данные наклонные (см. рис. 39). Тогда $OA = a$; $OB = b$;

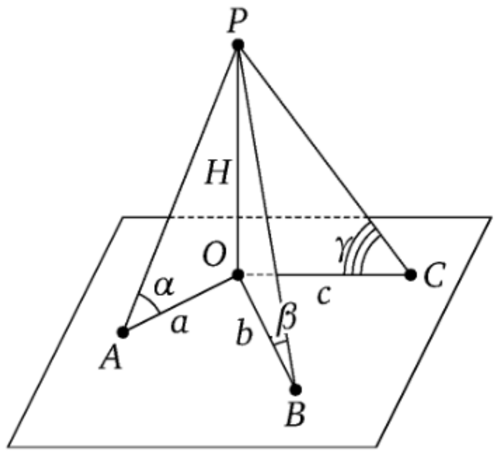


Рис. 39

$OC = c$. Введём также обозначения $PO = H$; $\angle PAO = \alpha$; $\angle PBO = \beta$; $\angle PCO = \gamma$. По условию $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Из прямоугольных треугольников POA, POB и POC получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{a}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{b}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{H}{c}$. Кроме того,

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Подставив значения тангенсов, получим уравнение

$$\frac{H}{c} = \frac{1 - \dfrac{H^2}{ab}}{\dfrac{H}{a} + \dfrac{H}{b}}.$$

Его решение: $H = \sqrt{\frac{abc}{a + b + c}}$.

114. Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.

Решение. Рассмотрим сечение BDC_1 данного параллелепипеда (см. рис. 40 *а*). Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Так как треугольник DC_1B равнобедренный, C_1O — его высота. Пусть P — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, PQ — перпендикуляр к плоскости BDC_1. Из того, что все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, следует, что точка P равноудалена от вершин треугольника DC_1B, поэтому Q — центр описанной около него окружности. Учитывая, что этот треугольник остроугольный и равнобедренный, получим, что точка Q лежит на отрезке C_1O.

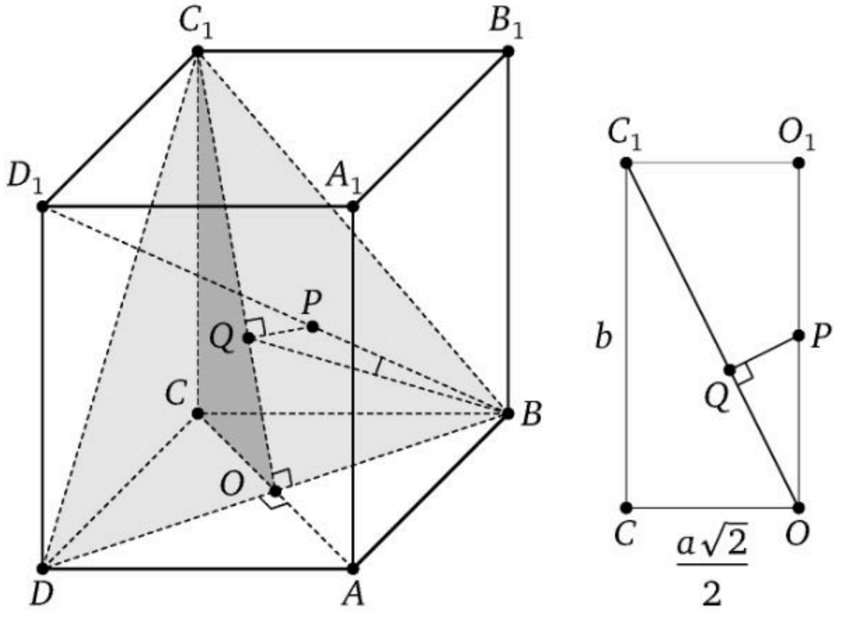


Рис. 40

Углом между BD_1 и BDC_1 будет являться острый угол α между прямой BD_1 и её ортогональной проекцией на плоскость BDC_1, т. е. угол PBQ. Пусть $AB=a$, $AA_1=b$. Тогда $PB=\dfrac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$. Длину PQ можно найти, рассмотрев, например, прямоугольник CC_1O_1O, где O_1 — точка пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 40 *б*). Из подобия прямоугольных треугольников POQ и C_1OO_1 получим, что $\dfrac{PQ}{C_1O_1}=\dfrac{PO}{C_1O}$.

Так как

$$C_1O_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad C_1O=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+b^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2},$$

получаем, что

$$PQ=\frac{\frac{b}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}}=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+2b^2}}.$$

Следовательно,

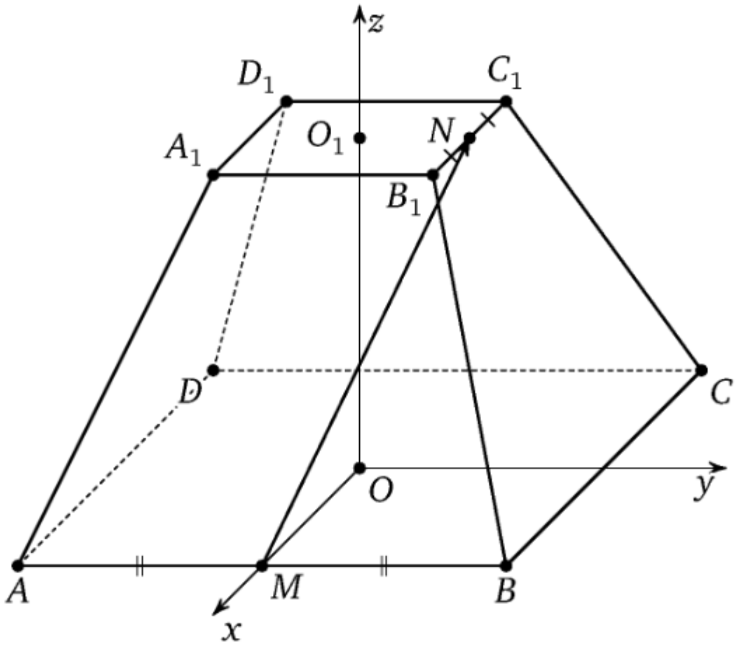
$$\sin\alpha=\frac{PQ}{PB}=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}}.$$

Величина острого угла α будет наибольшей тогда и только тогда, когда $\sin\alpha$ принимает наибольшее возможное значение. Для того чтобы найти наибольшее значение полученного выражения, преобразуем его:

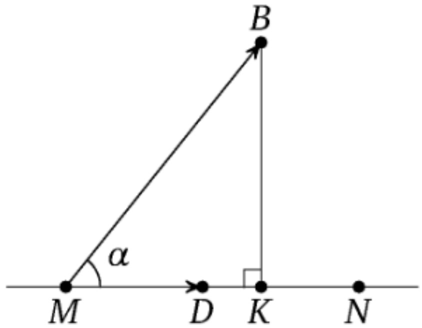
$$\sin\alpha=\frac{ab}{\sqrt{2a^4+2b^4+5a^2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+5}}.$$

Так как $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\geqslant 2$, причём равенство достигается в случае $a=b$, получаем, что $\sin\alpha\leqslant\dfrac{1}{3}$, и наибольшее значение искомого угла $\alpha=\arcsin\dfrac{1}{3}$ соответствует тому, что данный параллелепипед является кубом.

115. Решение. Заметим, что требуемое утверждение равносильно тому, что равны проекции на прямую MN отрезков MB и B_1N (вдвое меньшей длины, см. рис. 41 *а*). Пусть отрезок MK — проекция отрезка MB на прямую MN (см. рис. 41 *б*). Тогда $MK=MB\cos\alpha$, где α — угол между прямыми MN и MB. Пусть также $\overrightarrow{MD}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{MN}$. Тогда $MK=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.



а)



б)

Рис. 41

Аналогично если PN — проекция отрезка B_1N на прямую MN, то $PN=\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MD}$.

Введём прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$ так, как показано на рис. 41 *а* (*O — центр нижнего основания $ABCD$, оси x и y параллельны сторонам основания*). Пусть длины рёбер большего и меньшего оснований равны $2a$ и $2b$ соответственно, а высота пирамиды равна h. Тогда $B(a;a;0)$; $B_1(b;b;h)$; $M(a;0;0)$; $N(0;b;h)$. Следовательно, $\overrightarrow{MN}(-a;b;h)$; $\overrightarrow{MB}(0;a;0)$; $\overrightarrow{B_1N}(-b;0;0)$. Значит,

$$MK=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}\cdot\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{ab}{|\overrightarrow{MN}|};$$

$$PN=\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{B_1N}\cdot\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{(-b)(-a)}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{ab}{|\overrightarrow{MN}|}.$$

Таким, образом, $MK=PN$, что и требовалось.

Комбинаторика и логика

Раскраски и инварианты

116. Ответ: можно.

Решение. Раскрасим клетки доски по диагоналям в три цвета так, как показано на рис. 42. Как бы ни располагался корабль, он займёт на доске три клетки, покрашенные в три различных цвета.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

Рис. 42

Заметим, что 34 клетки имеют цвет «1», 33 клетки — цвет «2», и 33 клетки — цвет «3». Следовательно, чтобы наверняка попасть в корабль достаточно сделать 33 выстрела либо в клетки цвета «2», либо в клетки цвета «3».

117. Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём все клетки квадрата на две группы. В одну группу войдут центральная клетка и 4 угловые, а в другую — оставшиеся 4 клетки. Тогда из любых двух соседних клеток квадрата одна попадёт в первую группу, а другая — во вторую.

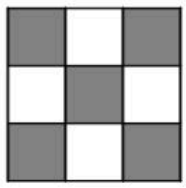


Рис. 43

Заметим, что в исходном квадрате суммы чисел в каждой группе равны между собой: $2+7+5+2+3=19$ и $6+4+3+6=19$. Прибавляя к числам, стоящим в соседних клетках, одно и то же число, мы одинаково изменяем сумму всех чисел первой группы и сумму всех чисел второй группы. Поэтому равенство сумм чисел в группах не может нарушиться. Но во втором квадрате сумма чисел в клетках одной группы равна $1+2+1+0+0=4$, а сумма чисел в клетках другой группы равна $0+0+0+0=0$, поэтому такой квадрат не может получиться из исходного.

Разделение клеток квадрата на две группы соответствует «шахматной» раскраске (*см. рис.* 43).

118. Ответ: в 16 цветов.

Решение. Разделим доску на 16 квадратов размерами 2×2 и каждый квадрат раскрасим своим цветом. Эта раскраска в 16 цветов удовлетворяет условию задачи.

Докажем, что большее количество цветов условию задачи не удовлетворяет. Заметим, что клеток каждого цвета должно быть не ме-

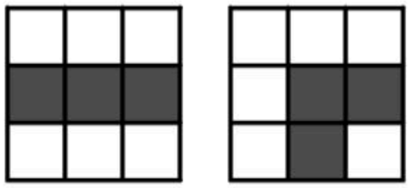


Рис. 44

нее четырёх. Действительно, пусть клеток какого-то цвета не более трёх, тогда только одна из них может граничить по стороне с двумя клетками своего цвета (см. рис. 44). Если же клеток каждого цвета не менее четырёх, то различных цветов не более шестнадцати.

119. Ответ: 3 краски.

Решение. Двух красок (например, белой и красной) не хватит: покрасив доску номер 1 в белый цвет, Том будет вынужден покрасить в красный цвет доски с номерами 4, 5 и 7. Тогда между красными досками номер 4 и номер 7 будет ровно две доски, что нарушает требование условия. Трёх красок достаточно: Том может покрасить три доски подряд в белый цвет, потом три доски в синий, потом три — в красный, потом снова три — в белый и т. д. При этом между одинаково окрашенными досками будет либо не более одной доски (если они в одной тройке), либо не менее шести (если они в разных тройках), так что условие задачи будет выполнено.

120. Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что

$$(2x+4)-x=x+4, \quad (3x+8)-x=2(x+4),$$
$$(x^2+5x)-x=x(x+4).$$

Следовательно, разность между числом, полученным на первом шаге, и исходным числом кратна числу $x+4$. Аналогичная ситуация будет и на каждом следующем шаге, поэтому разность между числом, полученным на любом шаге, и исходным числом должна быть кратна числу $x+4$. Так как $2002-3=1999$ и $2003-3=2000$ не делятся на $3+4=7$, из числа 3 нельзя получить ни числа 2002, ни числа 2003.

121. Решение. Покажем, каким образом Коля может перекрасить одну белую клетку, не меняя цвета остальных. Тогда, повторив эту операцию несколько раз (в соответствии с количеством белых клеток), он сможет перекрасить в чёрный цвет всю доску. Коля может выбрать какой-либо квадрат 2×2, содержащий белую клетку, и по очереди перекрасить каждый из четырёх «уголков», входящих в этот квадрат. При этом каждая клетка поменяет свой цвет трижды, т. е. все клетки этого квадрата в результате таких операций поменяют свой цвет. Затем достаточно рассмотреть ещё раз «уголок», не содержащий выбранную белую клетку, и перекрасить его клетки в исходный цвет.

122. Ответ: нельзя.

Решение. Рассмотрим внутренний пятиугольник, образованный точками пересечений диагоналей исходного пятиугольника. Заметим, что разрешённая операция либо не изменяет знака ни у одной его вершины, либо изменяет знак ровно у двух вершин. Значит, произведение чисел, стоящих во всех вершинах этого пятиугольника, остаётся неизменным при любом количестве разрешённых операций. Если бы было возможно изменить все числа на 1, то это произведение равнялось бы 1, в то время как в исходном пятиугольнике оно равно —1.

123. Ответ: может.

Решение. Для этого можно, например, «зациклить ситуацию»:

1) дождаться, когда на доске появится число 531 (оно появится, так как:

$$123+102=225, \quad 225+102=327,$$
$$327+102=429, \quad 429+102=531,$$

и затем, переставив в нём цифры, получить число 135;

2) затем «предоставить ход компьютеру» ($135+102=237$) и, переставив цифры в числе 237, вновь получить число 327. Тогда через 2 минуты на экране вновь появится число 531. Переставив в нём цифры, Федя опять получит число 135, и т. д.

Оценка плюс пример

124. Ответ: 13.

Решение. Если в классе 13 девочек, то количество их друзей-мальчиков из этого класса может быть любым целым числом от 0 до 12 (13 различных вариантов), что соответствует условию. Если же девочек будет больше 13 (хотя бы 14), то мальчиков в классе будет не больше 11, а значит, различных вариантов количества друзей-мальчиков будет не больше чем 12 (от 0 до 11). В этом случае хотя бы у двух девочек окажется одно и то же количество друзей-мальчиков, что противоречит условию.

125. Ответ: 33.

Решение. Подсчитаем, какое наибольшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Поскольку рядом с любой красной лампочкой обязательно есть синяя, три красные лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трёх последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше чем $48 : 3 = 16$. Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут, значит, хотя бы одна из них синяя. Получается, что синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17, тогда красных не более 33. Такой случай возможен: если лампочки с номерами 2, 5, 8, 11, …, 50 синие, а остальные красные, то в гирлянде 17 синих лампочек и 33 красных.

126. Ответ: 48.

Решение. Среди диагоналей доски есть такие, которые содержат нечётное количество клеток. Таких диагоналей 16: восемь белых и столько же чёрных. На каждой такой диагонали должна быть хотя бы одна пустая клетка, при этом никакие две диагонали общих клеток не имеют. Таким образом, пустых клеток должно быть не менее шестнадцати. Следовательно, клеток с конфетами не более 48. Пример для 48 конфет приведён на рис. 45.

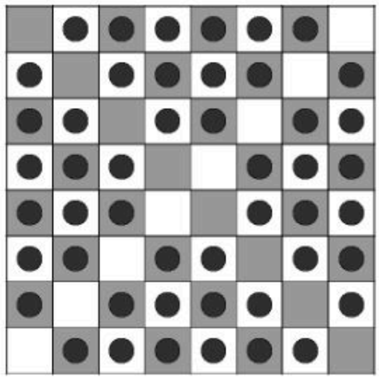


Рис. 45

127. Ответ: 8.

Решение. Заметим, что одним ходом конь может перепрыгнуть не более чем через одну горизонталь или через одну вертикаль. Следовательно, все отмеченные клетки должны находиться в квадрате 5×5. Пусть конь находится на клетке какого-то цвета (белой или чёрной), тогда, сделав один ход, он окажется на клетке противоположного цвета. Таким образом, за два хода он окажется на клетке того же цвета, т. е. отмеченными должны быть клетки одного цвета. При этом клетки, расположенные на одной диагонали через клетку, не могут быть отмечены (за два хода из одной из них в другую конь не попадёт).

Рассмотрим теперь квадрат 5×5. Без ограничения общности можно считать, что в нём 13 чёрных клеток и 12 белых. Предположим, что в нём отмечены белые клетки. Заметим, что в таком квадрате четыре белые диагонали. На каждой из них может быть отмечено не более двух клеток, иначе на диагонали найдутся две клетки, расположенные через одну. Значит, может быть отмечено

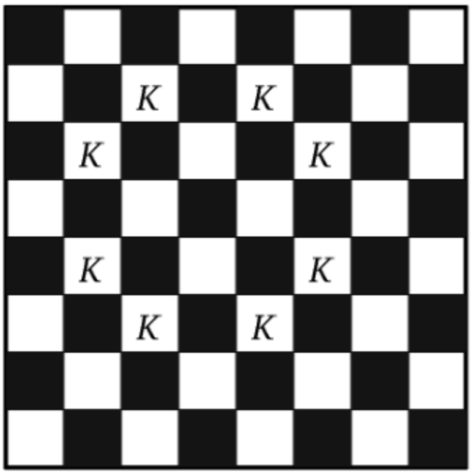
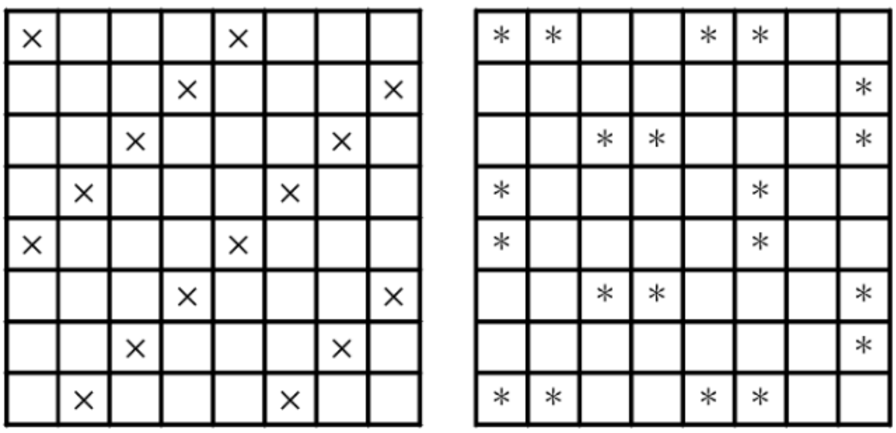


Рис. 46

не более восьми клеток. Допустим, что отмеченные клетки чёрные. Первым ходом с отмеченной чёрной клетки мы попадаем на белую, а с любой белой клетки внутри нашего квадрата за один ход можно попасть не более чем на 6 чёрных клеток. Следовательно, в этом случае отмеченных клеток не более семи. Таким образом, больше восьми клеток отмечено быть не может. Пример для восьми отмеченных клеток см. на рис. 46. Нетрудно убедиться, что он удовлетворяет условию задачи.

128. Ответ: 20.

Решение. Докажем сначала, что необходимо отметить не менее двадцати клеток. Для этого покажем, что с чёрными клетками должно соседствовать не менее десяти «отмеченных» белых клеток. Действительно, выберем 20 чёрных клеток и выделим их знаком «×» (см. рис. 47 *а*). Любая белая клетка соседствует не более чем с двумя выделенными чёрными. Поэтому чтобы обеспечить хотя бы эти чёрные клетки «отмеченными» соседями, потребуется отметить не



а) *б*)

Рис. 47

менее десяти белых клеток. Выбрав аналогичным образом 20 белых клеток, получим, что для того, чтобы обеспечить «отмеченными» соседями белые клетки, потребуется не менее десяти чёрных клеток. Таким образом, на доске необходимо отметить не менее двадцати клеток.

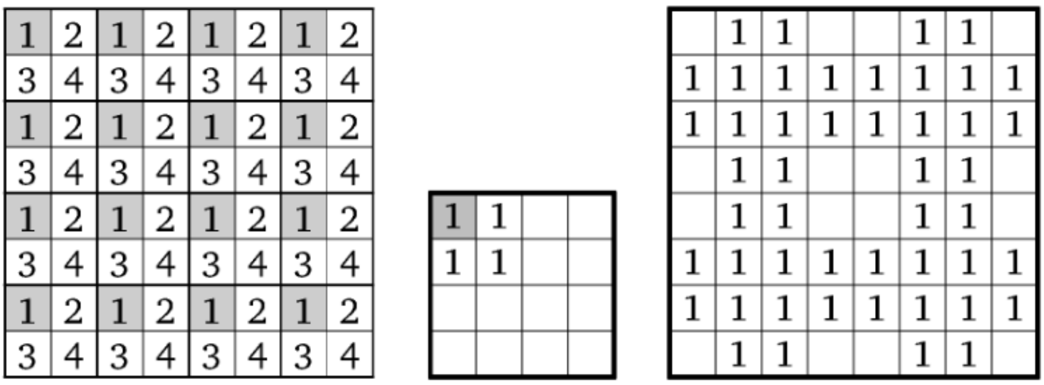
Приведём пример двадцати «отмеченных» клеток, удовлетворяющих условию задачи (см. рис. 47 *б*).

Существуют и другие примеры.

129. Ответ: 48.

Решение. Докажем, что больше сорока восьми фишек поставить нельзя. Для этого раскрасим все клетки углового квадрата 2×2 в четыре цвета (обозначим цвета цифрами от 1 до 4) и замостим копиями этого квадрата всю доску (см. рис. 48 *а*). Тогда вся доска является объединением четырёх непересекающихся множеств из 16 клеток.

Любая фишка может ходить только по клеткам своего цвета. Рассмотрим, например, все клетки первого цвета. Их удобно представить в виде квадрата 4×4 (см. рис. 48 *б*). Рассмотрим возможности хода на этой доске.



а) *б*) *в*)

Рис. 48

По правилам фишка сможет сделать ход, если есть свободная соседняя клетка (на новой доске 4×4). Докажем, что больше двенадцати фишек на клетки одного цвета поставить нельзя. Действительно, пусть на эту доску поместили более двенадцати фишек. Разобьём всю доску на четыре квадрата 2×2. Тогда хотя бы в один из них попадут четыре фишки. В этом случае угловая фишка наверняка не сможет сделать ход. Следовательно, на клетках одного цвета стоит не более 12 фишек. Значит, на клетки четырёх цветов можно поставить не более сорока восьми фишек.

На рис. 48 *в* приведён пример расположения сорока восьми фишек, удовлетворяющих условию.

130. Ответ: 11.

Решение. В каждом квадрате 2×2 по крайней мере две клетки должны быть покрыты уголками (иначе в такой квадрат поместится ещё один уголок). Квадрат 8×8 можно разбить на 16 квадратов размером 2×2, т. е. уголками должно быть покрыто не менее тридцати двух клеток, для чего потребуется не менее чем 11 уголков. Пример размещения одиннадцати уголков см. на рис. 49.

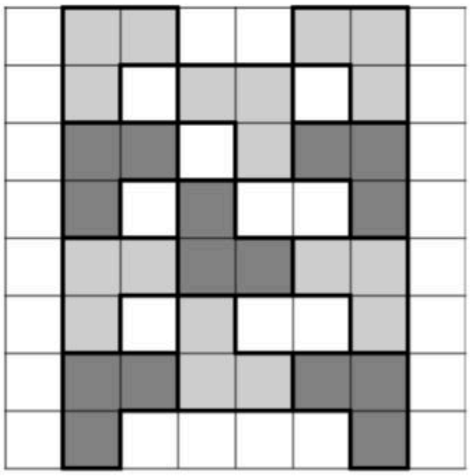


Рис. 49

131. Ответ: при $N = 99$.

Решение. Заметим, что сто фишек требуемым образом расставить нельзя. Действительно, если все фишки стоят на клетках большой диагонали, то перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Назовём такую расстановку «жёсткой». Докажем, что любая расстановка, в которой меньше чем сто фишек, не является «жёсткой». Пусть это не так и существует «жёсткая» расстановка, в которой количество фишек меньше чем количество столбцов (и меньше чем количество строк). Тогда в таблице найдутся пустые столбцы, пусть их количество равно s. Два пустых столбца не могут быть соседними, и пустой столбец не может быть крайним, так как в этих случаях в такие столбцы можно будет передвинуть фишку, не нарушая требуемого условия. Таким образом, слева от пустого столбца есть хотя бы одна фишка. Так как её нельзя сдвинуть вправо в этот пустой столбце, это означает, что в той же строке справа от пустого столбца стоит другая фишка. Таким образом, для каждой такой «левой» фишки найдётся «правая» фишка, стоящая в той же строке. «Левых» фишек не может быть меньше чем s, следовательно, и «правых» фишек не меньше чем s. Поскольку всего фишек не больше чем 99, они занимают не более чем $99-s$ строк, следовательно, не менее чем $100-(99-s)=s+1$ строк останутся свободными. Так как $s+1>s$, тем самым доказано, что свободных строк в таблице больше, чем свободных столбцов. Поскольку столбцы и строки в таблице равноправны, рассуждая аналогично, можно доказать, что количество пустых столбцов строго больше, чем количество пустых строк. Такое противоречие показывает, что наше предположение неверно и любая расстановка, в которой меньше чем сто фишек, «жёсткой» не является.

Логика и алгоритмы

132. Ответ: тетрадь была под диваном, шпаргалка — на столе, плеер — под подушкой, кроссовки — под столом.

Решение. По условию плеер нашёлся не под столом, не на столе и не под диваном. Значит, плеер мог быть только под подушкой. Поэтому шпаргалка под подушкой лежать не могла. Но она не валялась и на полу (т. е. её не было ни под столом, ни под диваном). Следовательно, шпаргалка лежала на столе. Тетрадь не лежала под столом, значит, ей осталось только место под диваном. Тогда под столом могли быть только кроссовки.

133. Ответ: не может.

Решение. Заметим, что сделавшие одинаковые заявления принадлежат к одной группе (либо все — рыцари, либо все — лжецы). Предположим, что на острове 2003 жителя. Возможны два случая.

1. Количество рыцарей на острове действительно чётно, тогда количество лжецов нечётно. Значит, обе части жителей сказали правду, что невозможно по условию.

2. Количество рыцарей на острове нечётно, т. е. первые соврали. Тогда должно быть правдой то, что лжецов нечётное количество. Но сумма двух нечётных чисел чётна, поэтому и этот случай невозможен.

Следовательно, на этом острове не может жить 2003 человека.

134. Ответ: 3 или 5.

Решение. 1. Пусть на острове x жителей, каждый из них дал $x-1$ ответ, поэтому $x(x-1)=26+30$, т. е. $x=8$.

2. Пусть на острове y рыцарей, тогда лжецов $8-y$. Ответ «рыцарь» каждый из рыцарей дал $y-1$ раз, а каждый из лжецов —

$7 - y$ раз. Тогда

$$y(y-1)+(8-y)(7-y)=26 \iff y^2-8y+15=0 \iff$$
$$\iff y=3 \quad \text{или} \quad y=5.$$

Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается 30 ответов «лжец»).

135. Ответ: осталась гиря массой 1 грамм.

Решение. Из условия задачи следует, что каждый раз забирали гирю с более тяжёлой чаши. При этом разность масс на чашах не меньше чем 1 г. Значит, забрав эту гирю, мы не сможем сделать так, чтобы перевесила другая чаша.

136. Ответ: не сможет.

Решение. Пусть из какой-то коробки в следующую переложен белый шарик. Тогда в неё из предыдущей надо переложить чёрный, иначе одна надпись на ней останется верной. Аналогично если из коробки переложен чёрный шарик, то в неё должен быть переложен белый. Значит, цвета переложенных шариков должны чередоваться по кругу. Но тогда если мы, начав с какой-то коробки, обойдём круг полностью, то цвет переложенного в неё (101-го по счёту) шарика будет таким же, как цвет переложенного из неё (первого по счёту). Противоречие.

137. Ответ: 99.

Решение. Так как порядок зачтения ответов на вопросы зрителю неизвестен, он должен сделать безошибочный выбор, зная только количество ответов «нет» (количество ответов «да» однозначно определяется по количеству ответов «нет», поэтому роли не играет). Если послано N записок, то количество услышанных ответов «нет» может принимать любые целые значения от 0 до N, т. е. возможен $N+1$ вариант. Так как это количество должно определять номер призовой коробки, его значение должно быть не меньше, чем количество коробок, т. е. $N+1 \geqslant 100 \iff N \geqslant 99$. Теперь приведём пример набора из 99 записок, удовлетворяющий условию. Пусть зритель подаёт ведущему записки с однотипной фразой: «Верно ли, что номер коробки с призом не превышает числа k?» для всех k от 1 до 99. Предположим, что приз лежит в коробке с номером m. Тогда на записки, в которых упоминаются числа от 1 до $m-1$, ведущий ответит «нет», а на остальные вопросы ответит «да». В результате зритель услышит $m-1$ ответов «нет». Прибавив 1 к количеству услышанных ответов «нет», он однозначно определит номер призовой коробки.

Математические игры

138. Ответ: выиграет Коля.

Указание. Для каждого из двух случаев расположения прямоугольника проанализируйте выигрышные и проигрышные клетки (с конца).

139. Ответ: Винни-Пух.

Решение. Первым ходом Винни должен взять 4 шишки, а в дальнейшем после любого хода Иа-Иа каждый раз брать одну шишку. В этом случае после каждого хода ослика под ёлкой будет оставаться нечётное количество шишек. Так как количество шишек под ёлкой постепенно будет уменьшаться, неизбежно настанет момент, когда под ёлкой останется одна шишка. Взяв её, Пух выиграет.

140. Решение. Своим первым ходом Коля должен «отсечь» ровно три клетки, т. е. закрасить клетки 4, 5 и 6, считая, например, от левого края. После этого вся игра будет идти правее. Когда Коле уже нечего будет закрашивать, он сможет закрасить эти три пропущенные клетки, а у Вани хода уже не будет.

141. Ответ: если $m+n$ чётно, то выигрывает второй игрок, если $m+n$ нечётно, то выигрывает первый.

Решение. В начале игры верёвочек единичной длины было

$$m(n+1)+n(m+1)=2mn+m+n.$$

Это число имеет ту же чётность, что и число $m+n$. Последний ход в игре разрушает последний замкнутый контур. Докажем, что граница любого замкнутого контура содержит чётное количество верёвочек единичной длины. Действительно, рассмотрим границу произвольного замкнутого контура. Каждый вертикальный столбец исходной сетки содержит чётное количество горизонтальных верёвочек единичной длины из этой границы (возможно, и нулевое), так как, войдя в замкнутый контур, например, снизу, мы обязаны из него выйти. Аналогично каждая горизонтальная строка исходной сетки содержит чётное количество вертикальных верёвочек единичной длины. Таким образом, общее количество единичных верёвочек на границе замкнутого контура чётно. Выигрышная стратегия для любого игрока состоит в том, чтобы не разрушать последний замкнутый контур, пока есть такая возможность.

Подсчёт несколькими способами

142. Ответ: 40 карточек.

Решение. Так как все карточки в итоге оказались перевёрнуты, каждую из них переворачивали либо один раз, либо три раза. Всего было сделано 180 переворачиваний: 100 из них потребовалось, чтобы перевернуть каждую карточку один раз; остальные 80 — чтобы какие-то карточки перевернуть ещё по два раза. Значит, по три раза перевернули 40 карточек.

143. Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что числа удалось расставить требуемым образом. Пусть S — сумма чисел, стоящих на каждой прямой, тогда сумма чисел на всех пяти прямых равна $5S$. Так как каждый кружок лежит на пересечении двух прямых, при таком подсчёте число, записанное в каждом из кружочков, учтено дважды. Следовательно, найденная сумма равна удвоенной сумме всех расставленных чисел, т. е. $5S = 2\cdot(4\cdot1 + 3\cdot2 + 3\cdot3)$. Получим, что $5S = 38$, что невозможно, так как на каждой прямой стоят 4 целых числа и их сумма должна быть целой.

144. Ответ: не может.

Решение. Пусть в прямоугольнике a строк и b столбцов. Заметим, что сумма всех чисел в прямоугольнике, с одной стороны, равна a, а с другой стороны, равна $2b$. Тогда $a = 2b$ и $ab = 2008$, т. е. $2b^2 = 2008 \iff b^2 = 1004$, но 1004 не является квадратом натурального числа.

145. Ответ: не мог.

Решение. Предположим, что такое возможно и наименьшее количество точек на грани большого куба равно n, тогда общее количество точек на гранях большого куба будет равно $6n + 15$. Заметим, что противоположные грани кубиков разбиваются на пары: одна грань — внутри большого куба, другая — снаружи. Поэтому общее количество точек на гранях большого куба равно количеству точек внутри него, т. е. на гранях маленьких кубиков расположено $12n + 30$ точек. Так как на каждом маленьком кубике нарисовано 12 точек, а кубиков восемь, получаем уравнение $12n + 30 = 96$, которое не имеет натуральных решений ($n = 5{,}5$). Из полученного противоречия следует ответ.

Турниры

146. Ответ: 16.

Решение. Так как в каждом туре для каждого игрока нашлась пара и в каждой паре один из игроков выбывал, общее количество игроков после каждого тура уменьшалось в два раза. Победитель участвовал в каждом туре и побеждал, значит, всего туров было шесть. Так как после шестого тура победитель определился однозначно, всего участников было $2^6 = 64$. Проигравшие в первом туре имеют одно поражение и ноль побед, проигравшие во втором туре имеют одну победу и одно поражение. Все вышедшие в третий тур будут иметь по итогам турнира не менее двух побед и не более одного поражения (после которого они выбыли), т. е. у них количество побед больше количества поражений. Так как после каждого тура количество участников уменьшалось в два раза, в третий тур вышло 16 участников.

147. Ответ: не могло.

Решение. Пусть суммарное количество побед всех команд-участниц турнира равно n, тогда суммарное количество их поражений также равно n. Предположим, что у каждой команды такое же количество ничьих, как и побед, тогда суммарное количество ничьих в таблице результатов турнира также равно n. При таком подсчёте каждый матч был учтён дважды, т. е. сумма всех побед, ничьих и поражений в таблице результатов равна $20 \cdot 19$. Но уравнение $3n = 20 \cdot 19$ не имеет натуральных решений. Противоречие.

148. Ответ: не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно. Поскольку каждая команда провела 15 матчей и играла в каждой стране, кроме своей, в каждой чужой стране она провела ровно по одной игре. Тогда в каждой стране побывало по одному разу ровно 15 команд. Но в каждом матче участвуют две команды, поэтому количество команд, сыгравших в каждой стране, должно быть чётным. Противоречие.

149. Ответ: 13.

Решение. Докажем, что x не может быть больше чем 13. Действительно, в каждом матче разыграно либо 3 очка (если победила одна из команд), либо 2 очка (если была ничья). Всего было сыграно $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ матчей, значит, разыграно не более чем 135 очков, т. е. сумма очков, набранных всеми командами, не больше чем 135. Таким образом, $10x \leqslant 135$, т. е. $x \leqslant 13{,}5$. Так как x — целое число, $x \leqslant 13$. Покажем, что по 13 очков команды набрать могли. Расположим команды по кругу и разобьём их последовательно на 5 пар. Пусть команды каждой пары сыграли между собой вничью, каждая из них выиграла у четырёх команд, следующих за данной парой по часовой стрелке, а остальным командам проиграла. Тогда каждая команда набрала ровно 13 очков.

Разное

150. Ответ: 0.

Решение. Пусть a_1, a_2, …, a_{2009} — числа, составляющие заданный набор, а $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$ — их сумма. По условию если любое число a_k заменить на число $S - a_k$, то получится тот же набор, в частности, сохранится сумма всех чисел, т. е.

$$S = (S - a_1) + (S - a_2) + \ldots + (S - a_{2009}).$$

Это значит, что $S = 2009S - S$, откуда $S = 0$. Следовательно, замена любого числа на сумму остальных чисел есть замена числа на ему противоположное, т. е. вместе с каждым числом в наборе присутствует и число, ему противоположное. Так как количество чисел набора нечётно, одно из них будет противоположным самому себе, т. е. равняться нулю. Значит, и произведение всех чисел набора равно нулю.

151. Решение. Рассмотрим 10 самолётов, летавших в первый день. Хотя бы один из них должен был летать ещё по крайней мере 10 дней (так как в каждый из оставшихся 91 дня летал один из этих десяти самолётов). Рассмотрим самолёт, летавший не менее 11 дней. Без ограничения общности можно считать, что это были дни с первого по одиннадцатый (и, возможно, ещё какие-нибудь). Предположим, что есть день A, в который этот самолёт не летал, тогда для каждого из первых 11 дней и дня A есть самолёт, летавший в этот день и в день A. Для каких-то двух из 11 дней (например, для первого и для второго) эти самолёты совпадут. Получим противоречие: два самолёта летало как в первый день, так и во второй.

152. Ответ: Базилио прав.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
B	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
C	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1

Рис. 50

Решение. Обозначим колёсики буквами A, B и C, а их допустимые положения — натуральными числами от 1 до 8. Тогда некоторая тройка натуральных чисел (a, b, c), $1 \leqslant a, b, c \leqslant 8$, задаёт код замка ($a$ отвечает положению колёсика A и т. д.). Итак, пусть набрана некая комбинация, открывающая чемодан. Тогда (*по принципу Дирихле*) хотя бы две верные цифры попадут либо в набор $(1, 2, 3, 4)$, либо в набор $(5, 6, 7, 8)$. Предположим, что две верные цифры попали в набор $(1, 2, 3, 4)$. Покажем, что тогда мы сумеем открыть чемодан не более чем за 16 попыток. Допустим, мы знаем две верные цифры кода, скажем m и n, и их порядок появления (за m следует n), но не знаем, на каких местах они стоят. В силу неисправности чемодана он непременно откроется, если мы наберём три комбинации вида $(m, n, *)$, $(*, m, n)$, $(m, *, n)$ (звёздочка означает, что вместо неё можно поставить любую цифру). Значит, достаточно предъявить таблицу размером 16×3, заполненную цифрами 1, 2, 3, 4 таким образом, чтобы любая упорядоченная пара (m, n), $1 \leqslant m, n \leqslant 4$, встречалась в каком-нибудь столбце (см. рис. 50). Если замок не открылся, то две верные цифры попадут во вторую четвёрку (5, 6, 7, 8) и составляется аналогичная таблица, в которой к каждой цифре прибавляется 4.

Варианты последних лет

2013/14 учебный год

7 класс

7.1. Запишите несколько раз подряд число 2013 так, чтобы получившееся число делилось на 9. Ответ объясните.

Ответ: например, 201 320 132 013.

Решение. Приведём несколько способов обоснования.

Первый способ. Сумма цифр записанного числа равна

$$(2+0+1+3)\cdot 3 = 18,$$

поэтому оно делится на 9 (по признаку делимости на 9).

Второй способ. Сумма цифр числа 2013 делится на 3, поэтому если написать 2013 подряд 3 раза, то сумма цифр полученного числа будет делиться на $3\cdot 3=9$, значит, и само число будет делиться на 9 (по признаку делимости на 9).

Третий способ. Разделим записанное число на 9:

$$201\,320\,132\,013 : 9 = 22\,368\,903\,557.$$

Четвёртый способ. Разделим записанное число на 3:

$$201\,320\,132\,013 : 3 = 67\,106\,710\,671.$$

Полученное число делится на 3, так как сумма его цифр равна 42. Следовательно, исходное число делится на 9.

Существуют и другие примеры: можно записать число 2013 *шесть раз подряд, девять раз подряд и т. д. (любое количество раз, кратное трём). Обоснования аналогичны приведённым выше.*

Критерии проверки

«+» — *приведены один или более верных вариантов ответа, и даны верные объяснения.*

«±» — *вместе с верным ответом указан и неверный, при этом верный ответ объяснён.*

«∓» — *верный ответ приведён без объяснений или с неверным объяснением.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

7.2. Высота потолков комнаты — 3 метра. При её ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол. Может ли площадь пола этой комнаты быть больше чем 10 квадратных метров? Ответ объясните.

Ответ: нет, не может.

Решение. Приведём несколько способов обоснования.

Первый способ. Так как на каждую стену уходит краски больше, чем на пол, площадь пола меньше, чем площадь каждой из стен. Площадь пола равна произведению ширины комнаты и её длины, а площадь одной из стен равна произведению ширины комнаты и её высоты. Поэтому длина комнаты меньше её высоты, т. е. меньше чем 3 метра. Аналогично и ширина комнаты меньше чем 3 метра. Поэтому площадь комнаты меньше чем 9 м^2, значит, она меньше чем 10 м^2.

Это рассуждение может быть записано алгебраически. Пусть a *и* b *— длина и ширина комнаты* (*в метрах*). *Тогда площадь комнаты равна* ab, *а площади стен равны* $3a$ *и* $3b$. *Из условия задачи следует, что* $3a > ab$ *и* $3b > ab$, *т. е.* $a < 3$ *и* $b < 3$. *Значит,* $ab < 9 < 10$.

Второй способ. Комната — это прямоугольный параллелепипед высотой 3 метра. Положим этот параллелепипед на одну из боковых граней; тогда новой высотой станет одна из сторон прежнего основания, например длина исходного параллелепипеда. При этом объём параллелепипеда не изменится, а площадь нового основания будет больше площади первоначального основания. Поэтому высота перевёрнутого параллелепипеда меньше чем 3 метра. Положив теперь параллелепипед на соседнюю боковую грань и проведя аналогичные рассуждения, получим, что в этом случае новой высотой параллелепипеда станет ширина исходного и она также меньше чем 3 метра.

Таким образом, как длина, так и ширина исходного параллелепипеда меньше чем 3 метра, значит, площадь его основания меньше чем 9 м^2.

Критерии проверки

«$+$» — *приведён верный ответ с полным обоснованием.*

«$\pm$» — *приведены верный ответ и верное в целом обоснование, в котором есть пробелы или неточности.*

«$\mp$» — *приведён верный ответ без обоснований.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

7.3. Вчера Саша варил суп и положил мало соли, суп пришлось досаливать. Сегодня он положил соли в два раза больше, но всё равно суп пришлось досаливать, правда, уже вдвое меньшим количеством соли, чем вчера. Во сколько раз Саше нужно увеличить сегодняшнюю порцию соли, чтобы завтра не пришлось досаливать? (*Каждый день Саша варит одинаковые порции супа.*)

Ответ: в 1,5 раза.

Решение. Приведём два способа решения: «арифметический» и «алгебраический».

Первый способ. Увеличение количества соли вдвое скомпенсировало половину вчерашней добавки, поэтому вчерашнее количество соли, которое Саша положил первоначально, составляет треть от необходимого (*можно сделать рисунок*). Значит, сегодняшнее количество соли, которое Саша положил первоначально, составляет две трети от необходимого. Следовательно, завтра надо положить ещё в полтора раза больше.

Второй способ. Пусть вчера Саша положил в суп x г соли, а добавил y г. Тогда сегодня он положил $2x$ г, а добавил $0{,}5y$ г. По условию $x+y=2x+0{,}5y$, т. е. $x=0{,}5y$. Таким образом, всего требуется положить $2x+0{,}5y=3x$ г соли, а сегодня Саша положил $2x$ г. Следовательно, сегодняшнюю порцию соли надо увеличить в $\frac{3x}{2x}=1{,}5$ раза.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием.*

«±» — *приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но ответ дан не на тот вопрос, который задан.*

«∓» — *приведён верный ответ, и проверено, что он удовлетворяет условию, но не обосновано, что он единственный.*

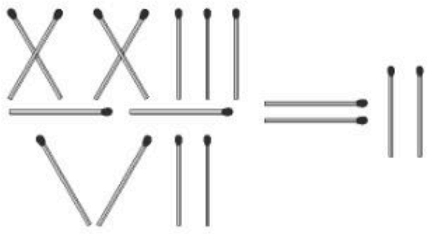
«∓» — *верный ответ получен рассмотрением конкретных числовых значений.*

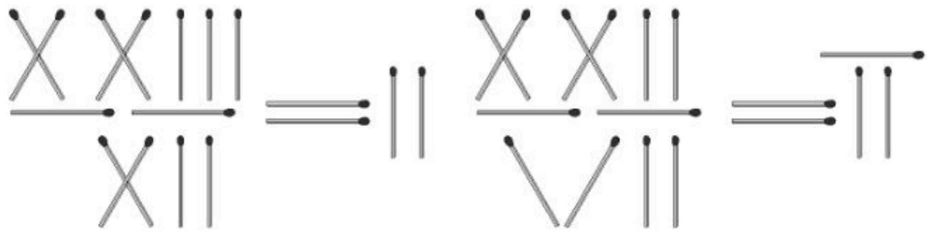
«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

7.4. Из спичек выложено неверное равенство (см. рисунок). Покажите, как переложить одну спичку, чтобы получилось равенство, в котором значения левой и правой частей различаются меньше чем на 0,1.

Ответ: см., например, рис. 7.4 *а*, *б*.





а) *б*)

Рис. 7.4

Решение. В равенстве на рис. 7.4 *а* значение левой части равно $\frac{23}{12}$, а значение правой части равно 2. Имеем

$$2-\frac{23}{12}=\frac{1}{12}<0{,}1.$$

В равенстве на рис. 7.4 *б* значение левой части равно $\frac{22}{7}=3{,}1428\ldots$, а справа — стилизованная запись числа $\pi=3{,}1415\ldots$ Эти числа различаются меньше чем на 0,002, что существенно меньше требуемого.

Отметим, что приближение числа π дробью $\frac{22}{7}$ было известно ещё Архимеду. Оно является одним из «наилучших приближений», т. е. любое приближение числа π в виде обыкновенной дроби с большей точностью имеет знаменатель больше чем 7.

Критерии проверки

«+» — *приведены один или более верных вариантов ответа.*
«±» — *вместе с верным вариантом ответа указан и неверный.*
«−» — *задача не решена или решена неверно.*

7.5. В сумме $+1+3+9+27+81+243+729$ можно вычёркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «−». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно 1, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно 2, затем получить 3 и т. д. До какого наибольшего целого числа ей удастся «дойти» без пропусков?

Ответ: до числа 1093 (включительно).

Решение. Число 1 получается вычёркиванием всех слагаемых, кроме первого. Затем Маша сможет получить числа

$$2=-1+3,\quad 3=+3\quad \text{и}\quad 4=+1+3.$$

Покажем, что, добавив слагаемое 9, можно получить любое целое число от $5=9-4$ до $13=9+4$. Действительно,

$$\begin{aligned} &5=-1-3+9; \quad &&8=-1+9; \quad &&11=-1+3+9;\\ &6=-3+9; &&9=+9; &&12=+3+9;\\ &7=+1-3+9; &&10=+1+9; &&13=+1+3+9. \end{aligned}$$

Добавив 27 и действуя аналогично, можно получить любое целое число от $14=-1-3-9+27$ до $40=+1+3+9+27$, затем получить все числа от $41=-1-3-9-27-81$ до $121=1+3+9+27+81$ и т. д. Следовательно, Маша сумеет получить все целые числа от 1 до $1+3+9+27+81+243+729=1093$.

По сути в этом решении использован метод математической индукции. Вначале получена база индукции, а затем показывается, что, умея получать все целые числа от 1 *до* k *и добавляя следующее слагаемое, равное* $2k+1$, *Маша сумеет получить все целые числа от* $k+1=(2k+1)-k$ *до* $3k+1=(2k+1)+k$.

Заметим, что слагаемые в заданной сумме являются последовательными степенями числа 3, *т. е. в троичной системе счисления эта сумма записывается в виде* 1111111_3. *Предложенная задача на конкретном примере иллюстрирует тот факт, что, используя степени тройки с коэффициентами* 0, 1 *и* -1, *можно записать в виде суммы любое целое число, причём единственным образом.*

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием.*
«±» — *приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но при записи ответа допущена арифметическая ошибка.*
«∓» — *приведён верный ответ, и присутствует идея его обоснования, но само обоснование отсутствует.*
«−» — *приведён только ответ.*
«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8 класс

8.1. В записи $*+*+*+*+*+*+*+*=**$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

Ответ: $1+2+4+5+7+8+9+0=36$.

Отметим, что приведённый пример единствен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{ab}$. *Так как сумма десяти различных* *цифр равна* 45, *данное равенство можно записать в виде* $45-a-b=$ $=10a+b$. *Упрощая его, получим* $11a+2b=45$.

Простейший перебор показывает, что $a=3$, $b=6$.

Критерии проверки

«+» — *приведён верный ответ.*

«−» — *приведён неверный ответ (в частности, с повторяющимися цифрами.*

«−» — *задача не решена.*

8.2. Про различные числа a и b известно, что $\frac{a}{b}+a=\frac{b}{a}+b$. Найдите $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Ответ: -1.

Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=b-a,$$

откуда

$$\frac{a^2-b^2}{ab}=b-a, \quad \text{или} \quad \frac{(a-b)(a+b)}{ab}=b-a.$$

Так как числа a и b различны, разделим обе части равенства на $a-b$, после чего получим $\frac{a+b}{ab}=-1$. Это и есть искомое значение, так как $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верные в целом выкладки, но отсутствует обоснование возможности деления на* $a-b$.

«∓» — *приведён верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8.3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B на стороны параллелограмма опущены высоты BM и BN, а из вершины D — высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Решение. Пусть для определённости точка N лежит на стороне AD, а точка Q — на стороне AB (см. рис. 8.3). Тогда диагонали BD и PN прямоугольника $PBND$ равны и пересекаются в их общей середине O. Аналогично диагонали BD и QM прямоугольника $QBMD$

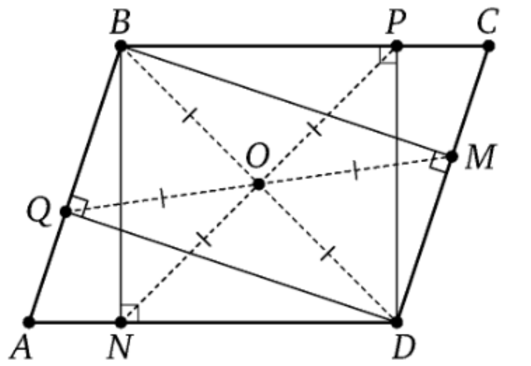


Рис. 8.3

равны и пересекаются в их общей середине O. Значит, и диагонали PN и QM четырёхугольника $PQNM$ равны и пересекаются в их общей середине O. Следовательно, $PQNM$ — прямоугольник.

Заметим, что предложенное рассуждение справедливо независимо от того, попадают ли основания высот на стороны параллелограмма или на продолжения сторон.

Возможны и другие способы решения, в частности использующие вспомогательные окружности и вписанные углы.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное решение.*

«∓» — *доказано только, что указанные точки являются вершинами параллелограмма.*

«−» — *разобран только частный случай.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8.4. На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2013. Каковы были два остальных числа?

Ответ: 2019 и 2025.

Решение. Заметим, что $9-3=6$ и $15-9=6$. Покажем, что в любой момент одно из чисел на доске будет на 6 меньше второго и на 6 больше третьего.

Действительно, пусть это свойство выполнено и на доске записаны числа $x-6$, x и $x+6$. Если сложить два крайних числа и вычесть среднее, то тройка чисел не изменится. Если сложить первые два числа и вычесть третье, то получится тройка $x-6$, x и $x-12$, а если сложить два последних числа и вычесть первое, то получится тройка

$x+12$, x и $x+6$. Во всех случаях указанное свойство сохраняется, поэтому оно будет выполняться после каждого шага. Значит, искомые числа: $2013+6=2019$ и $2019+6=2025$.

Ту же идею решения можно изложить иначе: например, можно показать, что тройки, которые могут получиться, образуют «цепочку» и каждый раз мы делаем по этой цепочке шаг вперёд или шаг назад (или остаёмся на месте).

Критерии проверки

«$+$» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«$\mp$» — *приведён верный ответ, и указано свойство, которое сохраняется, но оно не доказано.*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

8.5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM=\angle CKM=30°$. Найдите $\angle AKD$.

Ответ: $75°$.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle BMA=\angle CMK=60°$, а тогда и $\angle AMK=60°$ (см. рис. 8.5). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть AH — перпендикуляр, опущенный из вершины A на MK. Тогда прямоугольные треугольники AMB и AMH равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH=AB$. Используя это равенство, получим, что прямоугольные треугольники AKH и AKD равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AKD=\frac{1}{2}\angle MKD=$ $=\frac{150°}{2}=75°$.

В приведённом рассуждении используется, что точка H лежит на отрезке MK, а не на его продолжении за точку K. Это действительно

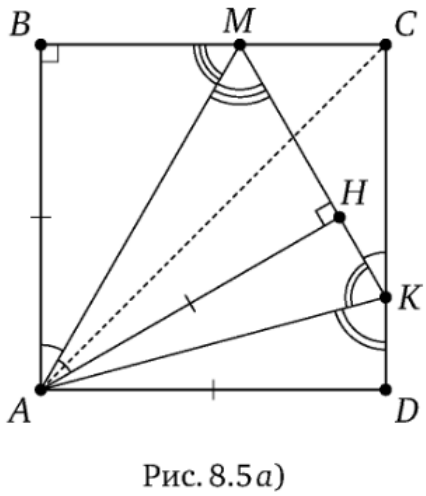


Рис. 8.5 *а*)

так, иначе бы отрезок AH пересекал сторону CD в точке X, но тогда $AH > AX > AD$, что противоречит равенству $AH = AD$. За отсутствие этого пояснения у школьника снижать ему оценку не следует.

Второй способ. Диагональ CA квадрата является биссектрисой внутреннего угла треугольника CMK, а луч MA — биссектрисой его внешнего угла, поэтому вершина A — центр вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, KA также является биссектрисой внешнего угла треугольника CMK, поэтому $\angle AKD = \frac{1}{2}\angle MKD = 75^\circ$.

Третий способ. Продлим отрезок KM до пересечения с прямой AB в точке P (см. рис. 8.5 *б*). Тогда $\angle PMB = \angle CMK = \angle AMB$. Следовательно, прямоугольные треугольники PMB и AMB равны (по катету и острому углу), тогда $PB = AB$, т. е. $AP = 2a$, где a — сторона данного квадрата, и $PM = AM$.

По свойству катета, лежащего против угла 30° в прямоугольном треугольнике, $AM = 2BM$ и $MK = 2MC$. Следовательно,

$$PK = PM + MK = 2(BM + MC) = 2BC = 2a.$$

Таким образом, треугольник APK равнобедренный с углом 30° при вершине P, поэтому его угол при основании равен 75°. Так как $\angle MKD = 150^\circ$, а $\angle MKA = 75^\circ$, получаем, что $\angle AKD = 75^\circ$.

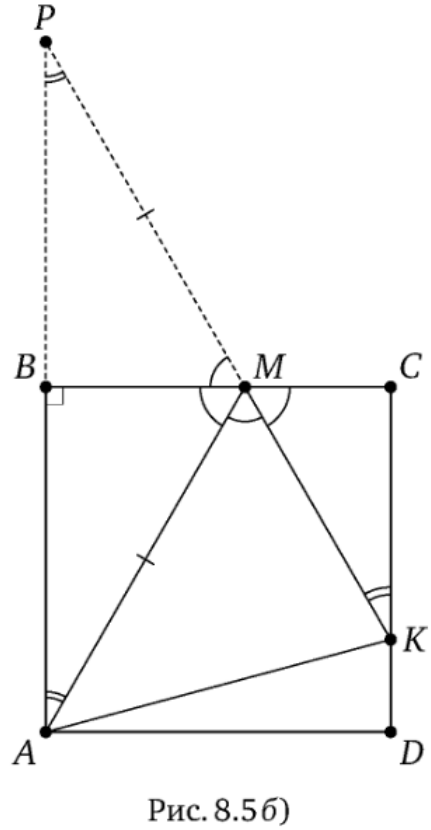


Рис. 8.5 *б*)

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*
«∓» — *приведён только ответ.*
«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8.6. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочерёдно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что, в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)

Решение. Рассмотрим все единичные отрезки, которые являются общими сторонами для двух клеток. Таких отрезков ровно шестьдесят — 30 вертикальных и 30 горизонтальных. Если отрезок разграничивает две закрашенные клетки, то будем говорить, что он «окрашен». Заметим, что, когда Саша пишет какое-то число в клетке, он указывает количество отрезков, которые не были окрашены до закрашивания этой клетки, а теперь стали окрашенными. Когда Саша приступает к суммированию, окрашены все 60 отрезков, т. е. сумма чисел, которые записывает Саша, всегда будет равна 60.

Отметим, что описывать «материализацию» указанной суммы можно по-разному, например, вместо окрашенного отрезка можно говорить о парах соседних закрашенных клеток и т. п.

Отметим также, что у этой задачи, безусловно, существует переборное решение, но изложить его в работе физически невозможно.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*
«∓» — *указано, но не обосновано, что Саша всегда получит число* 60 (*в том числе путём неполного перебора или демагогических рассуждений типа «по-любому так получится...»*).
«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9 класс

9.1. На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52 % из них чётные. Сколько чётных чисел записано на доске?

Ответ: 13.

Решение. Так как записанные натуральные числа являются последовательными, чётные и нечётные числа чередуются. По условию чётных чисел больше, значит, записанная последовательность начинается и заканчивается чётными числами.

Первый способ. Пусть записано n чётных чисел, тогда нечётных — $(n-1)$. Значит, чётные числа составляют $\frac{n}{2n-1}\cdot 100\,\%$ от всех записанных на доске. Получаем уравнение $100n = 52(2n-1)$, откуда $n = 13$.

Второй способ. Пусть всего записано x чисел. Тогда среди них $\frac{13}{25}x$ чётных и $\frac{12}{25}x$ нечётных, причём чётных больше ровно на одно. Следовательно, $\frac{13}{25}x - \frac{12}{25}x = 1$, откуда $x = 25$. Значит, $\frac{13}{25}x = 13$.

Третий способ. Чётных чисел больше на одно, значит, одно число составляет 52—48 % от их общего количества. Следовательно, искомое количество чётных чисел равно $\frac{52}{52-48} = 13$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное решение (любым способом).*

«±» — *приведены верные в целом рассуждения, но ответ дан не на тот вопрос (например, найдено только общее количество записанных чисел).*

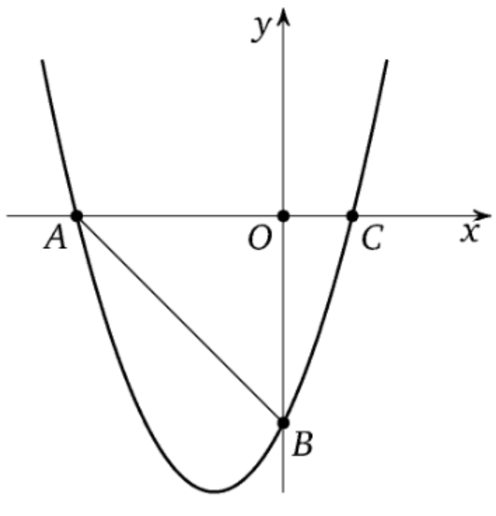
«∓» — *приведён верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9.2. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.

Ответ: 1.



Решение. Так как $y(0)=b$, точка B имеет координаты $(0;b)$. Найдём теперь длину отрезка OA.

Первый способ. Так как прямая AB перпендикулярна прямой $y=x$, она параллельна прямой $y=-x$. Кроме того, эта прямая проходит через точку $B(0;b)$. Значит, она задаётся уравнением $y=-x+b$. Так как $y=0$ при $x=b$, получаем, что $OA=-b$.

Второй способ. Из условия задачи следует, что биссектриса треугольника AOB, проведённая к стороне AB, лежит на прямой $y=x$, поэтому она совпадает с высотой этого треугольника. Следовательно, $OA=OB=-b$.

Таким образом, число b и искомая длина c отрезка OC являются корнями квадратного уравнения $x^2+ax+b=0$. По теореме Виета $bc=b$. Так как $b\neq 0$, получаем, что $c=1$.

Критерии проверки

«$+$» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*
«$\pm$» — *приведены верный ответ и верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях.*
«$\mp$» — *доказано только, что $OA=OB$, а дальнейших продвижений нет.*
«$\mp$» — *равенство $OA=OB$ использовано без доказательства, после чего обоснованно получен верный ответ.*
«$\mp$» — *верный ответ получен исходя из конкретных числовых значений a и b.*
«$-$» — *приведён только ответ.*
«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

9.3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD=\frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

Решение. Пусть M — точка касания окружности со стороной AC (см. рис. 9.3). Так как треугольник ABC равнобедренный, точка M — середина AC. Таким образом, $DA=AM=MC$.

С другой стороны, $AE=AM$ (отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки). Из равенства $AE=AM=AD$ следует, что треугольник DEM прямоугольный с прямым углом E, т. е. $DE\perp EM$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике EAM биссектриса AO является также высотой, т. е. $AO\perp EM$. Следовательно, DE и AO параллельны.

Обосновав, что $AD=AE$, можно также сослаться на известный факт: биссектриса AO внешнего угла при вершине равнобедренного

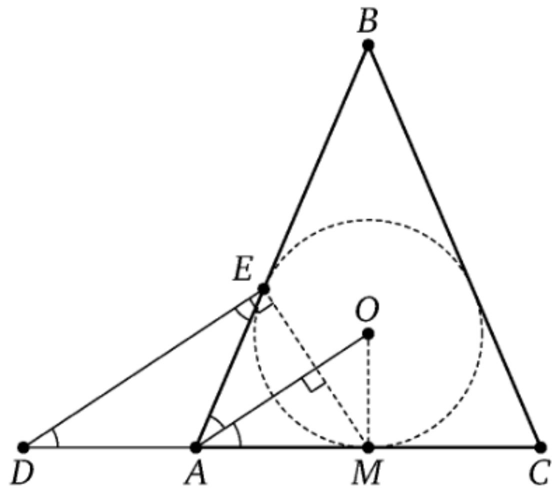


Рис. 9.3

треугольника DAE параллельна основанию DE. Этот факт несложно и доказать: если $\angle AED = \angle ADE = \alpha$, *то* $\angle CAE = 2\alpha$, *значит*, $\angle OAE = \alpha$. *Таким образом*, $DE \parallel AO$ (*по признаку параллельности прямых*).

Возможны и другие способы решения.

Критерии проверки

«$+$» — *приведено полное обоснованное решение.*

«$\pm$» — *приведено верное решение с незначительными неточностями или пробелами.*

«$\mp$» — *доказано только, что* $AE = DA = AM = MC$, *а дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

9.4. В квадратной таблице размером 100×100 некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своём столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

Ответ: 198.

Решение. Пример. Закрасим все клетки одной строки и все клетки одного столбца, за исключением их общей клетки. В этом случае условие задачи выполнено и закрашено ровно 198 клеток.

Оценка. Докажем, что требуемым образом не могло быть закрашено больше чем 198 клеток. Для каждой закрашенной клетки выделим ту линию (строку или столбец), в которой она единственная закрашенная. При таком выделении не может быть выделено больше чем 99 строк. Действительно, если выделено 100 строк, то каждая закрашенная клетка единственная именно в своей строке, но тогда закрашенных клеток не более чем 100. Аналогично не может быть выделено и больше чем 99 столбцов. Поэтому выделенных линий, а значит, и закрашенных клеток не более чем 198.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«∓» — *приведён верный ответ, и описан пример раскраски, но оценка отсутствует или проведена неверно.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9.5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если $DE = 5$ см.

Ответ: 10 см.

Решение. Пусть $\angle HBF = \alpha$ (см. рис. 9.5). Тогда $\angle FAH = \angle HBF = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Из прямоугольного треугольника ADC имеем $\angle C = 90° - \alpha$, а из прямоугольного треугольника ECB имеем $\angle EBC = 90° - \angle C = \alpha$.

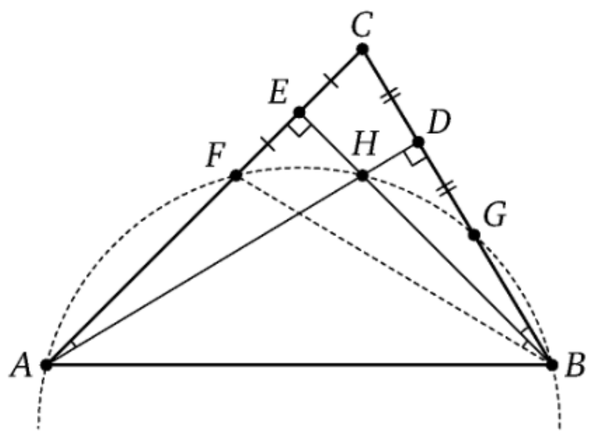


Рис. 9.5

Таким образом, BE — высота и биссектриса треугольника FBC, следовательно, этот треугольник равнобедренный и BE является его медианой, т. е. $FE = EC$.

Аналогично доказывается, что $CD = DG$. Значит, ED — средняя линия треугольника FCG. Поэтому $FG = 2DE = 10$ см.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9.6. 25 монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы и т. д., до тех пор пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

Ответ: 300.

Решение. Первый способ. Изобразим монеты точками и соединим каждую пару точек отрезком. Получим $\frac{25(25-1)}{2}=300$ отрезков. При каждом разбиении одной группы монет на две будем стирать все отрезки, соединяющие точки, соответствующие монетам, оказавшимся в разных группах. Пусть на некотором шаге мы разбили монеты одной из уже имевшихся групп на две группы по x и y монет. Тогда мы стираем xy отрезков. Это же число мы записываем. Таким образом, сумма записанных чисел — это количество всех стёртых отрезков. Так как изначально было 300 отрезков, а в итоге все отрезки стёрты, общее количество стёртых отрезков равно 300.

Второй способ. Рассмотрим переменную величину S, равную в каждый момент половине суммы квадратов количеств монет в кучках. Изначально $S=\frac{25^2}{2}=312{,}5$, а в самом конце

$$S=\frac{1^2+1^2+\ldots+1^2}{2}=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

Если кучка, в которой было $x+y$ монет, разбивается на две кучки по x и y монет, то S уменьшается на $\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}=xy$. Таким образом, при каждом разбиении величина S уменьшается на очередное записываемое число. Следовательно, сумма всех записанных чисел равна общему уменьшению величины S, которое равно $312{,}5-12{,}5=300$.

Третий способ. Докажем по индукции, что если изначально имеется n монет, то искомая сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

База индукции. При $n=2$ после первого же шага получаем две кучки по одной монете в каждой и записываем число $1\cdot1=1$. Так как равенство $\frac{2(2-1)}{2}=1$ верное, при $n=2$ доказываемое утверждение верно.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех $n<k$, и докажем, что тогда оно верно и для $n=k$. Пусть на первом

шаге k монет разделили на две группы по x и y монет ($k=x+y$). Для x и y монет доказываемое утверждение верно по предположению индукции.

Если при таком разбиении $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$, то записанная сумма равна

$$xy+\frac{x(x-1)}{2}+\frac{y(y-1)}{2}=\frac{x^2-x+y^2-y+2xy}{2}=$$
$$=\frac{(x+y)^2-(x+y)}{2}=\frac{k^2-k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}.$$

Если же $x=1$ и $y \geqslant 2$, то $k=y+1$ и записанная сумма в этом случае равна $1\cdot y+\frac{y(y-1)}{2}=\frac{(y+1)^2-(y+1)}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$.

Согласно принципу математической индукции утверждение доказано для любого натурального $n \geqslant 2$. В частности, для 25 монет получим $\frac{25(25-1)}{2}=300$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение с незначительными неточностями или пробелами.*

«∓» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

10 класс

10.1. Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

Ответ: 130.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности. Получим $a_1=934$; $a_2=16\times 13=208$; $a_3=10\times 13=130$; $a_4=4\times 13=52$; $a_5=7\times 13=91$; $a_6=10\times 13=130=a_3$. Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, далее члены последовательности будут повторяться с периодом 3. Число 2013 кратно трём, поэтому $a_{2013}=a_3=130$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верные в целом рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности.*

«∓» — приведён верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка.
«−» — приведён только ответ.
«−» — задача не решена или решена неверно.

10.2. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=x^2+bx+c$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x)=x^2+px+q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1)+f(k_2)+g(m_1)+g(m_2)\geqslant 0$.

Решение. Обозначим $A=f(k_1)+f(k_2)+g(m_1)+g(m_2)$.

Первый способ. Выразим A через корни данных трёхчленов.

Так как

$$f(x) = x^2+bx+c = (x-m_1)(x-m_2),$$
$$g(x) = x^2+cx+d = (x-k_1)(x-k_2),$$

имеем

$$f(k_1)+f(k_2) = (k_1-m_1)(k_1-m_2)+(k_2-m_1)(k_2-m_2),$$
$$g(m_1)+g(m_2) = (m_1-k_1)(m_1-k_2)+(m_2-k_1)(m_2-k_2).$$

Тогда, сгруппировав слагаемые и вынеся общие множители за скобки, получим

$$A = (k_1-m_1)(k_1-m_2-m_1+k_2)+(k_2-m_2)(k_1-m_2-m_1+k_2) = \\ = (k-m_2-m_1+k_2)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Второй способ. Выразим A через коэффициенты данных трёхчленов. Тогда

$$f(k_1)+f(k_2) = k_1^2+bk_1+c+k_2^2+bk_2+c = \\ = k_1^2+k_2^2+b(k_1+k_2)+2c = (k_1+k_2)^2-2k_1k_2+b(k_1+k_2)+2c.$$

Из теоремы Виета для квадратного трёхчлена $g(x)$ следует, что $k_1+ +k_2=-p$, $k_1\cdot k_2=q$.

Следовательно, $f(k_1)+f(k_2)=p^2-2q-bp+2c$.

Аналогично $g(m_1)+g(m_2)=b^2-2c-pb+2q$. Следовательно,

$$A = f(k_1)+f(k_2)+g(m_1)+g(m_2) = \\ = p^2-2q-bp+2c+b^2-2c-pb+2q = \\ = p^2-2bp+b^2 = (p-b)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верные в целом рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности.*

«∓» — *использованы верные идеи преобразования выражения, но допущены ошибки либо решение не доведено до конца.*

«−» — *рассмотрены только частные случаи.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

10.3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Ответ: $45°$

Решение. Пусть прямая AE пересекает сторону CD квадрата в точке M (см. рис. 10.3). Тогда треугольники ADM и DCF равны (по катету и острому углу). Следовательно, точка M — середина стороны CD. Тогда треугольник CFM прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle CMF = 45°$.

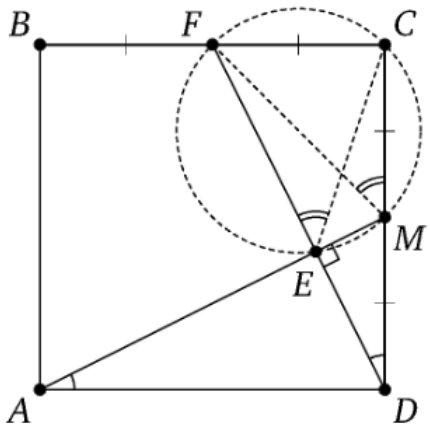


Рис. 10.3

Так как $\angle MEF = \angle MCF = 90°$, вокруг четырёхугольника $MCFE$ можно описать окружность. Вписанные углы CEF и CMF опираются на одну и ту же дугу этой окружности, значит, $\angle CEF = \angle CMF = 45°$.

Существуют также «вычислительные» способы решения, например использующие координаты или векторы.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

10.4. Найдите наибольшее значение выражения

$$a+b+c+d-ab-bc-cd-da,$$

если каждое из чисел a, b, c и d принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Ответ: 2.

Решение. Первый способ. Значение 2 достигается, например, если $a=c=1$, $b=d=0$. Докажем, что при заданных значениях переменных $a+b+c+d-ab-bc-cd-da \leqslant 2$.

Заметим, что

$$a+b+c+d-ab-bc-cd-da=(a+c)+(b+d)-(a+c)(b+d).$$

Пусть $a+c=x$, $b+d=y$, тогда требуется доказать, что $x+y-xy\leqslant 2$, если $0\leqslant x\leqslant 2$ и $0\leqslant y\leqslant 2$.

Действительно,

$$x+y-xy=(x+y-xy-1)+1=(x-1)(1-y)+1,$$

где $-1\leqslant x-1\leqslant 1$ и $-1\leqslant 1-y\leqslant 1$. Следовательно, $(x-1)(1-y)\leqslant 1$, поэтому $x+y-xy\leqslant 2$.

Введя новые переменные, можно рассуждать иначе. Зафиксируем переменную y и рассмотрим функцию $f(x)=(1-y)x+y$, где $x\in[0;2]$. Так как она линейная, её наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0;2]$. Но

$$f(0)=y\leqslant 2 \quad \text{и} \quad f(2)=2-y\leqslant 2,$$

значит, при всех $x\in[0;2]$ выполняется неравенство $f(x)\leqslant 2$.

Второй способ. Ту же идею линейности можно использовать изначально. Данное выражение можно считать линейной функцией от одной из переменных, если три остальные переменные зафиксировать.

Например, зафиксируем значения переменных b, c и d и рассмотрим функцию $f(a)=(1-b-d)a+b+c+d-bc-cd$, где $a\in[0;1]$. В силу монотонности её наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0;1]$. Аналогичная ситуация возникает и для заданных таким же образом линейных функций от переменных b, c и d.

Следовательно, наибольшее значение исходного выражения может достигаться только в том случае, когда переменные a, b, c и d принимают одно из двух значений: 0 или 1. Учитывая симметричность данного выражения, достаточно теперь проверить следующие случаи:

1) если $a=b=c=d=0$ или $a=b=c=d=1$, то значение выражения равно 0;

2) если $a=b=c=0$, $d=1$ или $a=b=c=1$, $d=0$, то значение выражения равно 1;

3) если $a=b=0$, $c=d=1$ или $a=b=1$, $c=d=0$, то значение выражения равно 1;

4) если $a=c=0$, $b=d=1$ или $a=c=1$, $b=d=0$, то значение выражения равно 2.

Таким образом, наибольшее значение данного выражения равно 2.

Критерии проверки

«$+$» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«$\pm$» — *приведены верный ответ и верные в целом рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности (например, доказана оценка, но отсутствует пример).*

«$\mp$» — *приведён верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка.*

«$\mp$» — *есть идея линейности, но она не доведена до конца.*

«$\mp$» — *приведён верный ответ, и указано, при каких значениях переменных он может достигаться, но оценка не проведена.*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

10.5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по $120°$, а площадь четырёхугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

Ответ: $60°$.

Решение. К обеим частям равенства $S_{AKPM} = S_{BPC}$ прибавим площадь треугольника BPK (см. рис. 10.5). Получим, что $S_{ABM} = S_{BCK}$. Следовательно, $\frac{1}{2}BC \cdot BK \sin\angle B = \frac{1}{2}AB \cdot AM \sin\angle A$. Тогда

$$\frac{BK}{AM} = \frac{AB\sin\angle A}{BC\sin\angle B}.$$

Из теоремы синусов $\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{BC}{AC}$, значит, $\frac{BK}{AM} = \frac{AB}{AC} \iff \frac{BK}{AB} = \frac{AM}{AC}$. Таким образом, точки K и M делят отрезки BA и AC в одном и том же отношении, считая от вершин B и A соответственно, т. е.

$$\frac{BK}{KA} = \frac{AM}{MC}. \qquad (*)$$

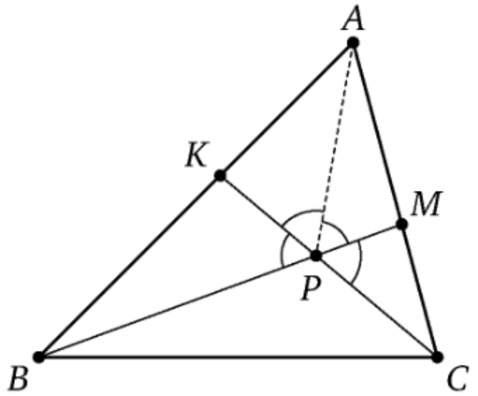


Рис. 10.5

Заметим теперь, что $\angle BPK = \angle KPA = \angle APM = \angle MPC = 60^\circ$ (углы, смежные с данными углами по 120°). Значит, PK и PM — биссектрисы треугольников APB и APC соответственно. По свойству биссектрисы треугольника имеем $\frac{BK}{KA} = \frac{BP}{PA}$ и $\frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$. Тогда с учётом равенства (∗) получим, что $\frac{BP}{PA} = \frac{AP}{PC}$.

Кроме того, $\angle BPA = \angle APC = 120^\circ$. Таким образом, треугольники BPA и APC подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle PAC = \angle PBA$. Значит,

$$\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAP + \angle PBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«∓» — *получено только, что точки K и M делят стороны в одном и том же отношении.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

10.6. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в девяти строках таблицы, представим в виде произведения простых множителей. Выпишем все простые числа, большие чем 40, но меньшие чем 81: 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79. Заметим, что каждое из этих десяти чисел может встретиться только в одном из этих девяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, превышают 81. Следовательно, найдётся строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n.

Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«$\mp$» — *в решении есть идея рассмотрения простых чисел, лежащих между* 40 *и* 81, *не доведённая до конца.*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

11 класс

11.1. Серёжа и Миша, гуляя по парку, набрели на поляну, окружённую липами. Серёжа пошёл вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошёл в ту же сторону). Дерево, которое у Серёжи было 20-м, у Миши было 7-м, а дерево, которое у Серёжи было 7-м, у Миши было 94-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

Ответ: 100.

Решение. Первый способ. Пусть вокруг поляны росло n деревьев. Вычислим двумя способами количество промежутков между теми двумя деревьями, о которых сказано в условии задачи. При обходе Серёжи имеем $20-7=13$. При обходе Миши имеем $7+(n-94)=$ $=n-87$. Следовательно, $n-87=13$, т. е. $n=100$.

Второй способ. Между первым и вторым упомянутыми деревьями Миша насчитал ещё $94-7-1=86$ деревьев. А Серёжа между вторым деревом и первым деревом насчитал $20-7-1=12$ деревьев. Значит, вокруг поляны растёт $86+12=98$ и ещё два упомянутых дерева, т. е. ровно 100 деревьев.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«$\mp$» — *приведён верный ход рассуждений, но допущена ошибка на одно дерево при «перескоке».*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

11.2. В треугольнике ABC угол C равен 75°, а угол B равен 60°. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

Ответ: 30°.

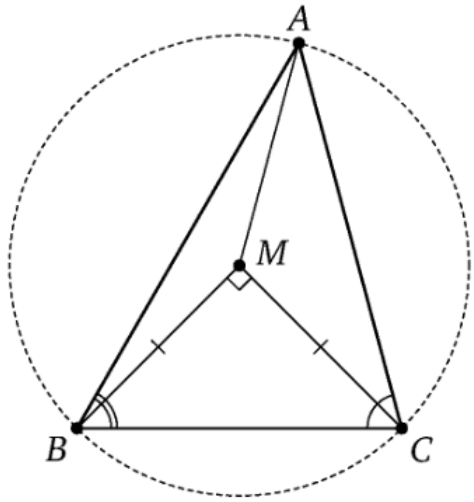


Рис. 11.2

Первый способ. Из условия задачи следует, что угол $\angle BAC = 45^\circ$. Проведём окружность с центром M и радиусом $MA = MB$ (см. рис. 11.2). Так как $\angle BMC = 90^\circ$, бо́льшая дуга BC этой окружности является геометрическим местом точек, из которых хорда BC видна под углом 45°. Следовательно, вершина A принадлежит этой окружности.

Значит, треугольник AMC равнобедренный, и тогда

$$\angle MAC = \angle MCA = \angle BCA - \angle MCB = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

Второй способ. Пусть $BC = a$, тогда из треугольника BMC имеем $MC = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Из треугольника ABC по теореме синусов получим, что

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ},$$

т. е. $AC = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Далее, из треугольника CMA по теореме косинусов

$$AM^2 = CM^2 + CA^2 - 2CM \cdot CA \cdot \cos\angle MCA = \\ = \frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 2\frac{a}{\sqrt{2}}a\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2},$$

т. е. $AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, треугольник AMC равнобедренный.

Дальнейшие вычисления изложены выше.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *доказано, что треугольник AMC равнобедренный, но в дальнейшем допущена арифметическая ошибка.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11.3. Для квадратного трёхчлена $f(x)$ и некоторых действительных чисел l, t и v выполнены равенства $f(l)=t+v$, $f(t)=l+v$, $f(v)=l+t$. Докажите, что среди чисел l, t и v есть равные.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Из условия задачи вытекают следующие равенства:

$$\begin{cases} al^2+bl+c=t+v, & (1)\\ at^2+bt+c=v+l, & (2)\\ av^2+bv+c=l+t. & (3)\end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1) сначала уравнение (2), а затем уравнение (3), получим

$$\begin{cases} a(l^2-t^2)+b(l-t)=t-l,\\ a(l^2-v^2)+b(l-v)=v-l.\end{cases}$$

Предположим, что среди чисел l, t и v нет равных, т. е. $l\neq t$ и $l\neq v$. Тогда, разделив почленно первое уравнение на $l-t$, а второе уравнение — на $l-v$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a(l+t)+b=-1,\\ a(l+v)+b=-1.\end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим $a(t-v)=0$, а это возможно, только если $t=v$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что среди чисел l, t и v нет равных, неверно.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«∓» — *составлена первая система уравнений, и получено какое-то следствие из неё, но решение до конца не доведено.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11.4. На экране компьютера — число 12. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число 54?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Заметим, что $12=2^2\cdot 3^1$, т. е. суммарный показатель степени множителей (двоек или троек) равен 3. Независимо от произведённого действия при каждой смене числа суммарный показатель степени множителей изменяется на 1. Всего должно произойти

60 таких изменений. Следовательно, через 60 секунд суммарный показатель степени должен быть той же чётности, что и в исходном числе 12.

Но $54 = 2^1 \cdot 3^3$, т. е. этот показатель равен 4 — чётному числу. Значит, получить число 54 ровно через минуту невозможно.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение, в котором допущены мелкие погрешности или неточности.*

«∓» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11.5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно 1. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат рёбра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Решение. Указанные медианы AD и BE боковых граней ASB и BSC лежат на скрещивающихся прямых, а скрещивающиеся рёбра куба взаимно перпендикулярны. Тогда условие существования куба с рёбрами на указанных прямых равносильно перпендикулярности этих прямых. Таким образом, требуется найти длину b бокового ребра пирамиды, у которой угол между скрещивающимися медианами боковых граней равен 90°. Возможны различные способы решения.

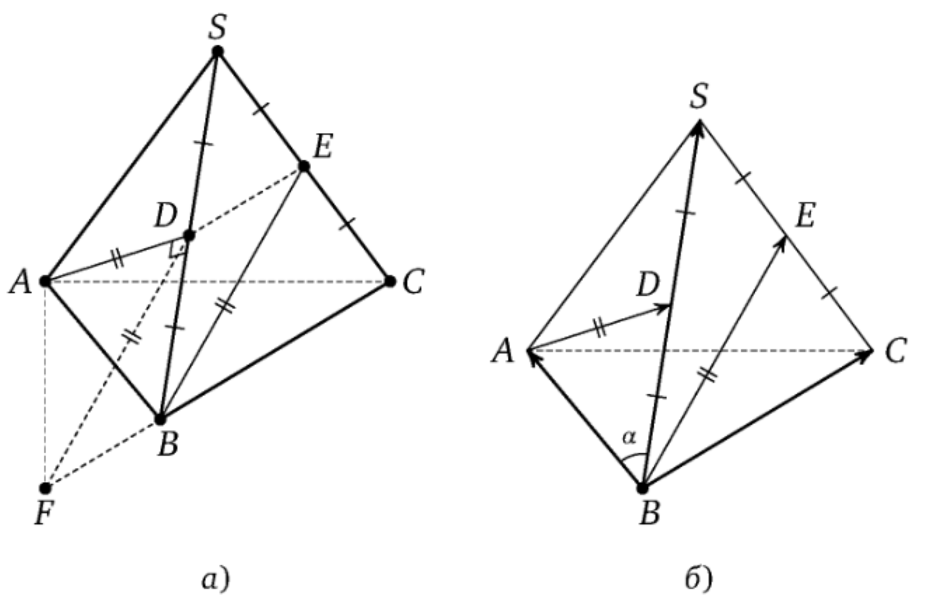


Рис. 11.5

Первый способ. По формуле для вычисления медианы треугольника

$$AD = BE = \frac{\sqrt{2\cdot 1^2 + 2b^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2+2}}{2}.$$

При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{ED}$ образом медианы BE является отрезок FD (см. рис. 11.5 *а*). Из треугольника ABF по теореме косинусов

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2 - 2AB\cdot BF\cdot \cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Треугольник ADF прямоугольный и равнобедренный, поэтому $AF = AP\sqrt{2}$. Получим уравнение

$$\frac{\sqrt{b^2+2}}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Его решением является $b = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Возможен также аналогичный способ вычисления, если от вершины S отложить отрезки, параллельные данным медианам, длины которых равны удвоенной медиане.

Второй способ. Пусть $\angle SBA = \angle SBC = \alpha$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$ и выразим через них $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

(см. рис. 11.5 *б*). Тогда

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BS} - 2\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BS}^2 + \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BS} - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}).$$

Учитывая, что $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$ и $|\overrightarrow{BS}| = b$, получим

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}(b^2 + b\cdot 1\cdot\cos\alpha - 2b\cdot 1\cdot\cos\alpha - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ) =$$
$$= \frac{1}{4}(b^2 - b\cos\alpha - 1).$$

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$ будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0. Таким образом, $\frac{1}{4}(b^2 - b\cos\alpha - 1) = 0$.

Из треугольника ABS получаем

$$b\cos\alpha = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2},$$

значит, $b^2 = \frac{3}{2}$, т. е. $b = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Векторный базис и вспомогательный угол можно ввести и по-другому, например $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ и плоский угол при вершине S.

Возможен также способ решения, использующий вспомогательный объём.

Критерии проверки

«$+$» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«$\pm$» — *имеется верный ход рассуждений, но при заключительном подсчёте допущена арифметическая ошибка.*

«$\mp$» — *объяснено, почему задача сводится к условию перпендикулярности медиан, а дальнейшее решение отсутствует или содержит ошибки.*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

11.6. На окружности отмечено 20 точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

Ответ: 156 180.

Решение. Концами искомых хорд могут являться 3, 4, 5 или 6 точек. Разберём эти случаи.

1. Концами хорд являются 3 точки (см. рис. 11.6 *а*). Их можно выбрать C_{20}^3 способами. Соединить каждую тройку точек хордами попарно можно единственным способом.

2. Концами хорд являются 4 точки. Возможны два случая взаимного расположения хорд (см. рис. 11.6 *б*, *в*). Четыре точки можно выбрать C_{20}^4 способами. Для каждой четвёрки точек существует по 8 способов соединить их хордами попарно.

3. Концами хорд являются 5 точек. В этом случае ровно две хорды имеют общую вершину, а третья хорда соединяет две оставшиеся точки (см. рис. 11.6 *г*). Пять точек можно выбрать C_{20}^5 способами. Для каждой пятёрки точек существуют пять вариантов проведения хорд (по количеству точек, в которых сходятся две хорды).

4. Концами хорд являются 6 точек (см. рис. 11.6 *д*). Шесть точек можно выбрать C_{20}^6 способами. Для каждой шестёрки точек есть единственный способ проведения хорд, так как хорды должны попарно пересекаться во внутренних точках.

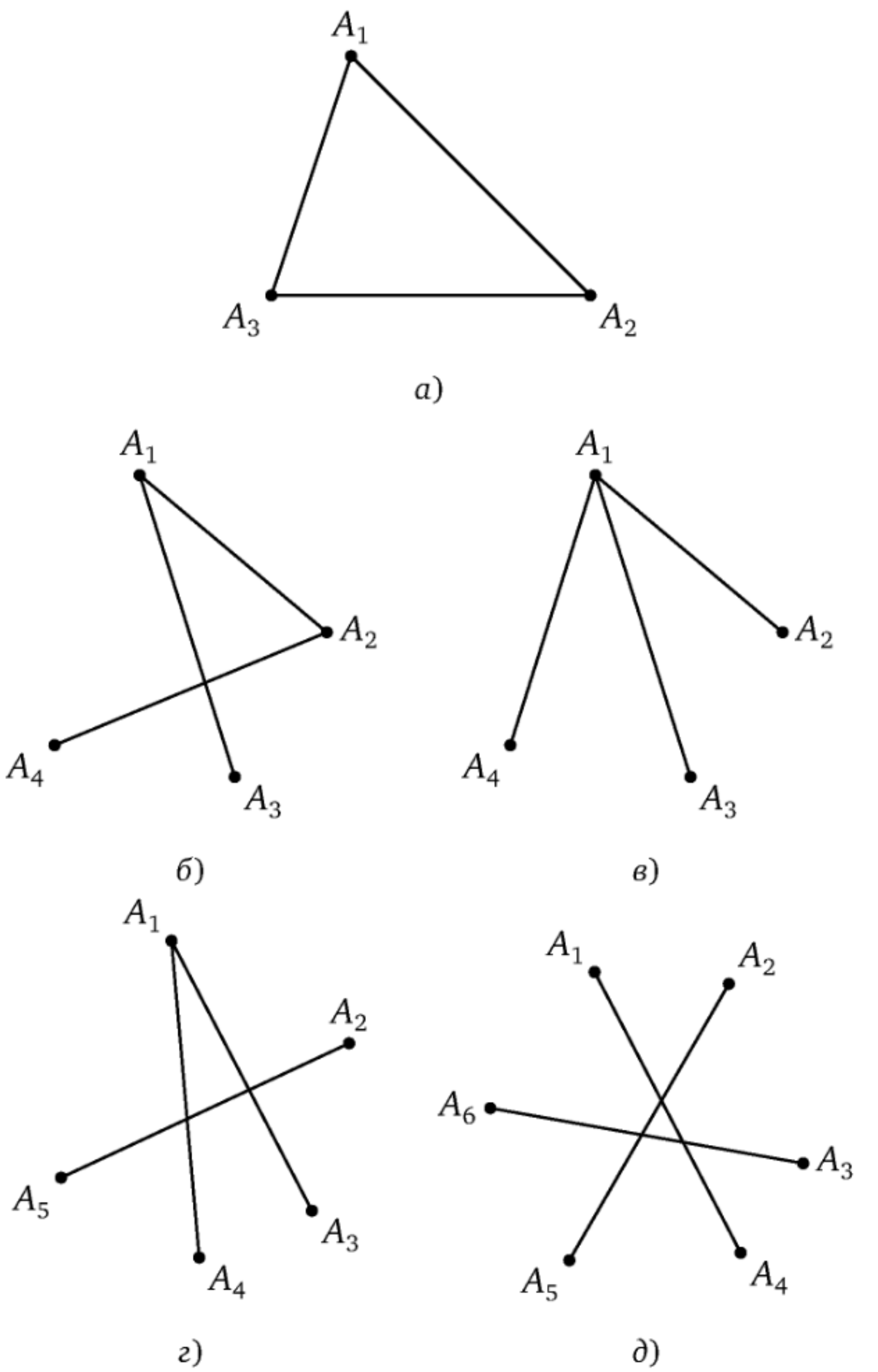


Рис. 11.6

Таким образом, всего способов проведения хорд будет

$$C_{20}^3+C_{20}^4\cdot 8+C_{20}^5\cdot 5+C_{20}^6 =$$

$$= \frac{20\cdot 19\cdot 18}{2\cdot 3}+\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+$$

$$+\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} =$$

$$= \frac{20\cdot 19\cdot 18}{2\cdot 3}\left(1+34+\frac{17\cdot 16}{4}+\frac{17\cdot 16\cdot 15}{4\cdot 5\cdot 6}\right) =$$

$$= 10\cdot 19\cdot 6\cdot (35+68+34) = 10\cdot 19\cdot 6\cdot 137 = 156\,180.$$

Ответ может быть оставлен в виде $C_{20}^3+C_{20}^4\cdot 8+C_{20}^5\cdot 5+C_{20}^6$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *верно разобраны все случаи, но при итоговом подсчёте допущена арифметическая ошибка.*

«∓» — *верно разобраны какие-то отдельные случаи.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

2014/15 учебный год

7 класс

7.1. В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

Ответ: да, можно.

Решение. Например, можно заплатить тремя монетами по 27 тугриков и получить сдачу пятью монетами по 16 тугриков.

Возможны и другие примеры, которые приведём в общем виде:

а) заплатить $3+16n$ *монет по* 27 *тугриков и получить сдачу* $5+27n$ *монет по* 16 *тугриков, где* n — *натуральное число;*

б) заплатить $22+27m$ *монет по* 16 *тугриков и получить сдачу* $13+16m$ *монет по* 27 *тугриков, где* m — *натуральное число или ноль.*

Эти примеры получаются из следующих соображений. Понятно, что платить и получать сдачу монетами одного достоинства бессмысленно. Следовательно, необходимо подобрать такие целые числа x *и* y*, чтобы выполнялось равенство* $16x+27y=1$.

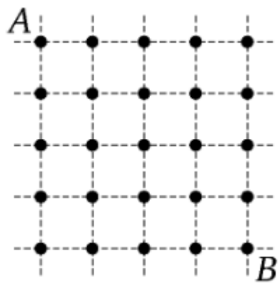
Отметим, что уравнение вида $ax+by=c$ *имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда число* c *кратно НОД*$(a;b)$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и пример.*

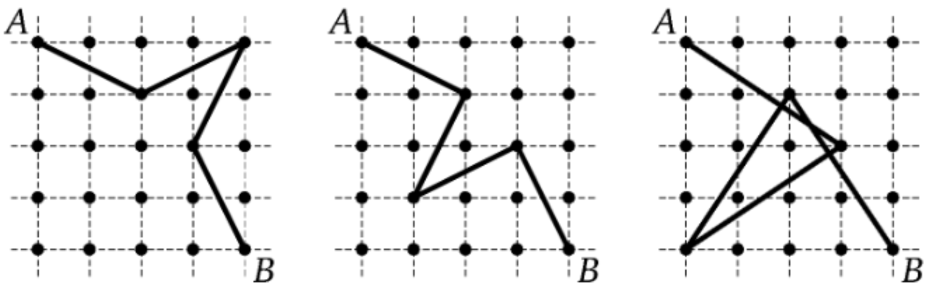
«±» — *приведено несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*



7.2. Соедините точки A и B (см. рисунок) ломаной из четырёх отрезков одинаковой длины так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;



а) *б*) *в*)

Рис. 7.2

2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;

3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.

(*Достаточно привести один пример.*)

Ответ: возможен один из вариантов проведения ломаной, показанных на рис. 7.2 *а*, *б*, *в* (с точностью до симметрии относительно прямой AB).

Критерии проверки

«+» — *приведён верный пример.*

«±» — *приведено несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

7.3. У юного художника были одна банка синей и одна банка жёлтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зелёную траву и жёлтое солнце. Зелёный цвет он получал, смешивая две части жёлтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?

Ответ: синим закрашено 27 дм^2, зелёным — 33 дм^2, а жёлтым — 16 дм^2.

Решение. Обозначим площади, закрашенные синим (blue), зелёным (green) и жёлтым (yellow) цветом, через B, G и Y соответственно. Так как зелёный цвет получается смешением двух частей жёлтой краски и одной части синей, на закрашивание зелёным цветом площади G расходуется количество жёлтой краски, соответствующее площади $\frac{2}{3}G$, а синей — $\frac{1}{3}G$. Учитывая, что вся синяя краска была израсходована, составим уравнение: $B+\frac{1}{3}G=38$. Кроме того, по условию G на 6 дм^2 больше чем B, т. е. $B=G-6$. Подставив это выражение в составленное уравнение, получим, что $G=33$, значит, $B=27$.

Так как вся жёлтая краска также была израсходована, $Y+\frac{2}{3}G=38$. Подставив в это равенство значение $G=33$, получим, что $Y=16$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное рассуждение, найдены все три площади, но допущена арифметическая ошибка.*

«±» — *приведено верное рассуждение, но найдены только две площади из трёх.*

«∓» — *верно составлено уравнение (система уравнений), но оно (она) не решено (решена).*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

7.4. Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок, причём в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?

Ответ: в шестой банке 16 жуков.

Решение. Пусть в первой банке x жуков, тогда во второй банке не меньше чем $x+1$ жуков, в третьей — не меньше чем $x+2$ жука и т. д. Таким образом, в десятой банке не меньше чем $x+9$ жуков. Следовательно, общее количество жуков не меньше чем $10x+45$. Учитывая, что всего рассаживали 150 жуков, получим $x \leqslant 10$.

С другой стороны, в десятой банке должно быть не больше чем $2x$ жуков, в девятой — не больше чем $2x-1$ жуков и т. д. Это означает, что в первой банке не больше чем $2x-9$ жуков, а всего жуков не больше чем $20x-45$. Так как всего рассаживали 150 жуков, $x \geqslant 10$.

Таким образом, в первой банке ровно 10 жуков, а в последней банке — 19 или 20. Найдём сумму одиннадцати последовательных чисел начиная с десяти: $10+11+\ldots+19+20=165$. Так как всего должно быть 150 жуков, отсутствует банка, в которой 15 жуков. Следовательно, рассадка определяется однозначно: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 и 20 жуков с первой по десятую банку соответственно. Значит, в шестой банке 16 жуков.

Доказав, что $x \leqslant 10$, *можно продолжить рассуждения иначе. Так как в десятой банке не меньше чем* $x+9$ *жуков, причём* $x+9 \leqslant 2x$, *получаем, что $x \geqslant 9$. Затем следует рассмотреть два случая: $x=9$ и $x=10$, оценивая количество жуков в десятой банке.*

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верные в целом оценки количества жуков как «сверху», так и «снизу», которые содержат некоторые пробелы.*

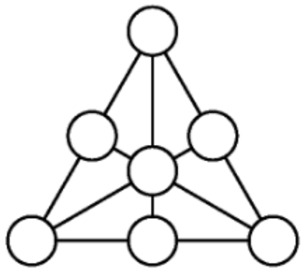
«±» — *приведены верные обоснованные оценки количества жуков как «сверху», так и «снизу», верно найдена рассадка жуков по банкам, но ответ на вопрос задачи неверен или отсутствует.*

«∓» — *верно проведена только одна из двух требуемых оценок.*

«∓» — *верно указана рассадка жуков по банкам, но она не обоснована.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*



7.5. Можно ли в кружках (см. рисунок) разместить различные натуральные числа таким образом, чтобы суммы трёх чисел вдоль каждого отрезка оказались равными?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Пусть требуемая расстановка существует, S — сумма всех расставленных чисел, a и b — числа, стоящие в кружках, расположенных в каких-либо двух вершинах треугольника. Тогда для той вершины, в которой стоит число a, сумма чисел вдоль трёх отрезков, содержащих эту вершину, равна $S+2a$. Аналогично для вершины, в которой стоит число b, эта сумма равна $S+2b$. Так как суммы чисел вдоль любого отрезка равны, суммы чисел вдоль трёх отрезков также равны, т. е. $S+2a=S+2b$, откуда следует, что $a=b$. Но это противоречит условию, где сказано, что все числа должны быть различными. Таким образом, требуемой расстановки не существует, что и требовалось доказать.

Аналогичное рассуждение можно проводить для любой пары кружков, через каждый из которых проходит ровно три отрезка.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом рассуждение, которое содержит некоторые пробелы или недочёты.*

«∓» — *найдена идея суммирования чисел по трём отрезкам, содержащим один и тот же кружок, но дальнейших продвижений нет.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8 класс

8.1. Графики трёх функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причём $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$? Ответ объясните.

Ответ: да, обязательно.

Решение. Первый способ. Общую точку графиков первых двух функций можно найти из следующей системы:

$$\begin{cases} y = ax + a, \\ y = bx + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ ax + a = bx + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ (a - b)x + (a - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ (a - b)(x + 1) = 0. \end{cases}$$

Так как $a \neq b$, решением системы является $x = -1$, $y = 0$.

Из условия задачи следует, что точка $(-1; 0)$ принадлежит и графику третьей функции. Тогда $0 = -c + d$, т. е. $c = d$.

Второй способ. Если $x = -1$, $y = 0$, то уравнения $y = ax + a$ и $y = bx + b$ обращаются в верные равенства при любых значениях a и b. Поэтому точка $(-1; 0)$ принадлежит первым двум графикам (прямым). Так как $a \neq b$, эти прямые различны, значит, других общих точек у них нет. Следовательно, точка $(-1; 0)$ принадлежит и графику третьей функции. Тогда $0 = c + d$, т. е. $c = d$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

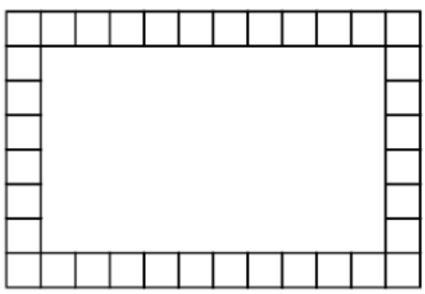
«±» — *приведено верное в целом рассуждение, но единственность общей точки не показана (не использовано условие $a \neq b$).*

«∓» — *верно найдена или угадана общая точка первых двух графиков, но дальнейших продвижений нет.*

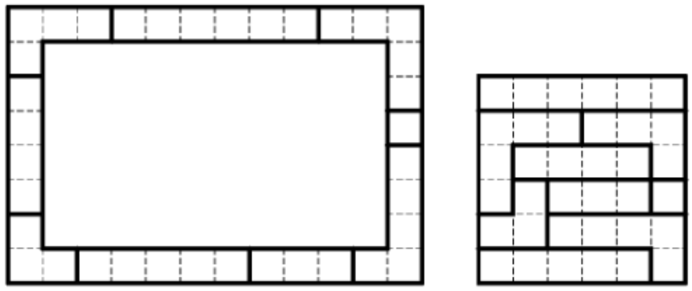
«∓» — *верный ответ получен в результате рассмотрения конкретных числовых значений коэффициентов.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задаче не решена или решена неверно.*



8.2. Из клетчатой бумаги вырезана прямоугольная рамка (см. рисунок). Её разрезали по границам клеток на девять частей и сложили из них квадрат 6×6. Могли ли все части, полученные при разрезании,



а) *б*)

Рис. 8.2

оказаться различными? (*При складывании квадрата части можно переворачивать.*)

Ответ: да, могли.

Решение. На рис. 8.2 *а* показано, каким образом может быть разрезана рамка в соответствии с условием задачи, а на рис. 8.2 *б* — как из получившихся частей сложить квадрат.

Возможны и другие способы решения.

Критерии проверки

«+» — *приведены верные рисунки, показывающие, как разрезать и как складывать.*

«±» — *приведён только верный способ складывания квадрата, из которого можно восстановить способ разрезания рамки.*

«∓» — *приведён верный способ разрезания рамки, но не показано, как сложить квадрат.*

«−» — *приведён только ответ (без примера).*

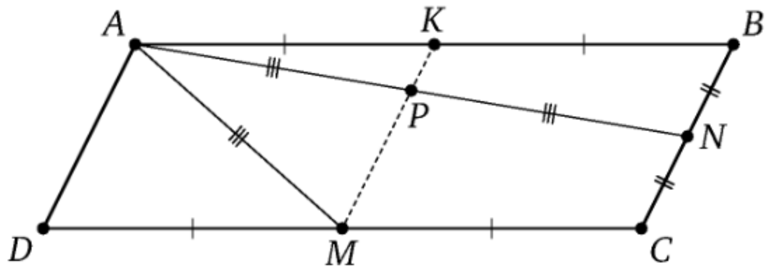
«−» — *задача не решена или решена неверно, например, какие-то части, полученные при разрезании, оказались одинаковыми.*

8.3. Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

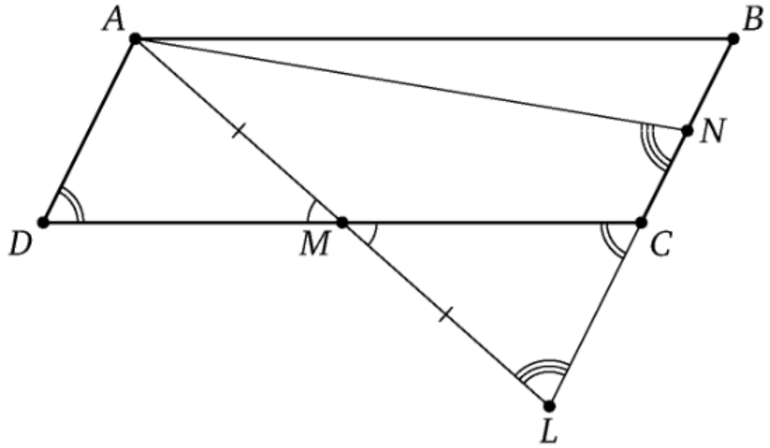
Ответ: тупым.

Решение. Пусть N — середина BC, M — середина CD, $AN = 2AM$ (см. рис. 8.3 *а*, *б*).

Первый способ. Через точку M проведём прямую, параллельную BC. Она пересечёт AB в точке K, причём $AK = KB$ (см. рис. 8.3 *а*). Тогда по теореме Фалеса $AP = PN = 0{,}5AN = AM$. В равнобедренном треугольнике APM имеем $\angle AMP = \angle APM < 90^\circ$, так как это углы при его основании. Следовательно, $\angle PAD = 180^\circ - \angle APM > 90^\circ$. Так как $\angle BAD > \angle PAD$, получаем, что $\angle BAD > 90^\circ$.



а)



б)

Рис. 8.3

Второй способ. Продлим отрезок AM до пересечения с прямой BC в точке L. Треугольники DAM и CLM равны по стороне и двум прилежащим углам (см. рис. 8.3 *б*). Следовательно, $AM = ML$, и тогда $AL = 2AM = AN$. В равнобедренном треугольнике ANL имеем $\angle ANL = \angle ALN < 90°$. Угол ANL внешний для треугольника ABN, значит, $\angle ABN < \angle ANL < 90°$. Следовательно, $\angle BAD = 180° - \angle ABN > 90°$.

Отметим, что, независимо от способа решения, последующее сравнение углов может осуществляться не только указанными способами.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное в целом решение, содержащее несущественные пробелы.*

«±» — *полностью доказано, что угол BAD не острый, но не доказано, что он не может быть прямым.*

«∓» — *доказано только, что угол BAD не может быть прямым.*

«∓» — *верный ответ получен в результате рассмотрения частных случаев.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно*

8.4. Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

Ответ: 9 бриллиантов.

Решение. Первый способ («арифметический»). Заметим, что количество бриллиантов у каждого пирата за ночь не изменилось. У Билла 12 бриллиантов, а их средняя масса уменьшилась на 1 карат, следовательно, сумма их масс уменьшилась на 12 каратов. Аналогично у Сэма также 12 бриллиантов, их средняя масса уменьшилась на 2 карата, поэтому сумма их масс уменьшилась на 24 карата. Поскольку масса бриллиантов у Билла и Сэма уменьшилась на 36 каратов, у Джона она на те же 36 каратов увеличилась. Так как средняя масса бриллиантов Джона увеличилась на 4 карата, у него было $36:4=9$ бриллиантов.

Второй способ («алгебраический»). Пусть Джону досталось x бриллиантов. Обозначим среднюю массу бриллиантов, доставшихся Биллу, через b, Сэму — через s, Джону — через d. Тогда сумма масс бриллиантов у Билла была равна $12b$, у Сэма — $12s$, у Джона — xd.

Наутро количество бриллиантов у каждого не изменилось, а средняя масса бриллиантов стала: у Билла — $(b-1)$, у Сэма — $(s-2)$, у Джона — $(d+4)$. Сумма масс бриллиантов стала: у Билла — $12(b-1)$, у Сэма — $12(s-2)$, у Джона — $x(d+4)$. Сумма масс бриллиантов у трёх пиратов не изменилась, следовательно,

$$12b+12s+xd=12(b-1)+12(s-2)+x(d+4).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим $4x-36=0$, т. е. $x=9$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное в целом решение, но допущена арифметическая ошибка.*

«∓» — *уравнение составлено верно, но не решено или решено неверно.*

«∓» — *верный ответ получен на конкретном примере.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8.5. В треугольнике ABC угол B равен $120°$, $AB=2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $AD:DC$.

Ответ: $AD:DC=2:3$.

Решение. Первый способ. Пусть M — середина стороны AB. Опустим перпендикуляр CH на прямую AB (см. рис. 8.5 *а*). В прямоугольном треугольнике BHC имеем $\angle HBC=60°$, тогда $\angle BCH=30°$, поэтому

$$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{2}AM.$$

Значит, $HM:MA=3:2$. Так как $MD \parallel CH$, по теореме о пропорциональных отрезках $CD:DA=HM:MA=3:2$.

Второй способ. Пусть M — середина стороны AB. Продлим отрезок DM до пересечения с продолжением стороны BC в точке K

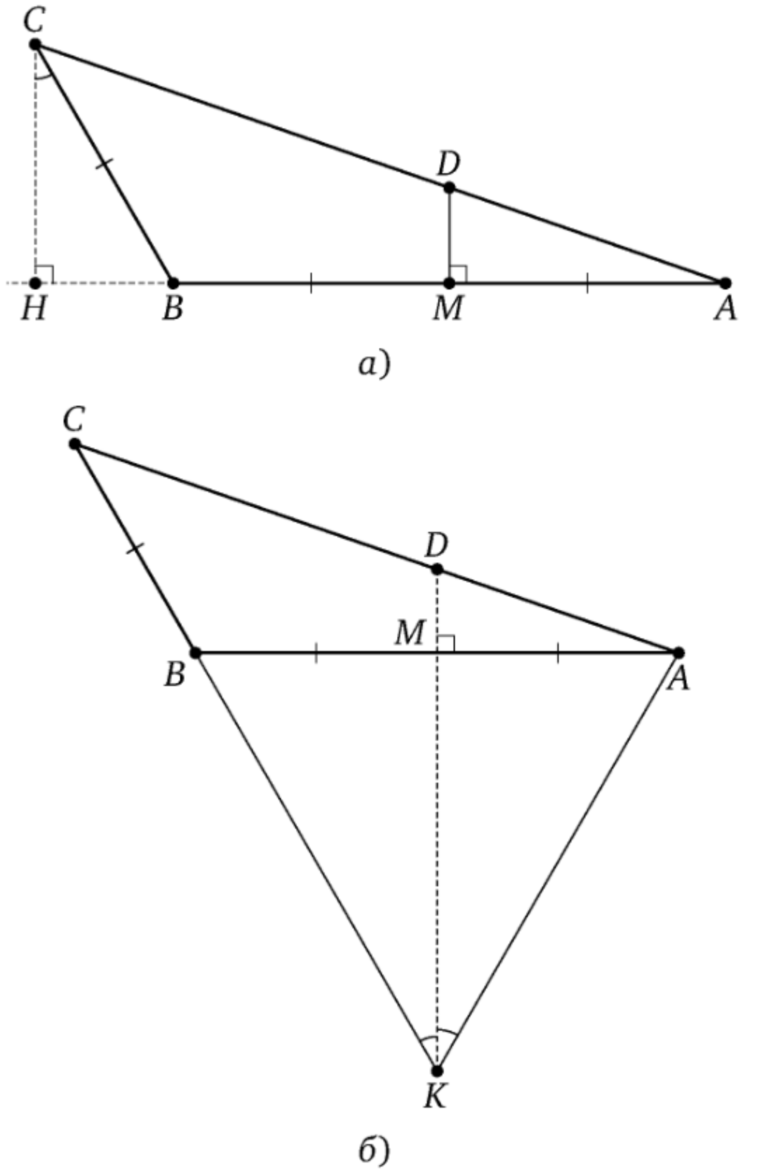


Рис. 8.5

(см. рис. 8.5 *б*). Так как точка K лежит на серединном перпендикуляре к AB, получаем, что $KA = KB$. В равнобедренном треугольнике AKB имеем $\angle ABK = 60^\circ$, значит, этот треугольник равносторонний. Тогда

$$KC = KB + BC = \frac{1}{2}AB + AB = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}KA.$$

Высота KM треугольника AKB является и его биссектрисой, значит, KD — биссектриса треугольника AKC. По свойству биссектрисы треугольника CD получаем, что $DA = KC : KA = 3 : 2$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное в целом решение, но допущены незначительные пробелы или неточности.*

«∓» — *приведён только верный ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

8.6. Гномы сели за круглый стол и голосованием решили много вопросов. По каждому вопросу можно было голосовать «за», «против» или воздержаться. Если оба соседа какого-либо гнома по какому-нибудь вопросу выбрали один и тот же вариант ответа, то при голосовании по следующему вопросу он выберет этот же вариант. А если они выбрали два разных варианта, то при голосовании по следующему вопросу гном выберет третий вариант. Известно, что по вопросу «Блестит ли золото?» все гномы проголосовали «за», а по вопросу «Страшен ли Дракон?» Торин воздержался. Сколько могло быть гномов? (*Опишите все возможности и докажите, что других нет*.)

Ответ: количество гномов могло быть любым, кратным 4.

Решение. Если по какому-либо вопросу гномы проголосовали единогласно, то после этого они всегда будут голосовать точно так же. Поэтому вопрос о драконе обсуждался раньше, чем вопрос о золоте.

Возможно, что перед вопросом о золоте гномы уже несколько раз единогласно голосовали «за». Рассмотрим последний вопрос, по которому был несогласный гном (а такой точно был, что следует из условия про Торина). Пусть этот гном голосовал «против». Для того чтобы его соседи в следующий раз проголосовали «за», гномы, сидящие от него через одного, должны были воздержаться. Аналогично гномы, сидящие от них через одного, должны были голосовать «против» и т. д. Получаем цепочку ...П?В?П?В?..., где «П» и «В» обозначают голосовавших «против» и воздержавшихся, а знаки вопроса — гномов, мнение которых нас не интересует. В случае, если несогласный гном воздержался, получаем такую же цепочку.

Если количество гномов чётное, то цепочка должна замкнуться, а это значит, что в ней одинаковое количество «В» и «П». Тогда количество гномов, обозначенных «В» и «П», чётно, а количество всех гномов вдвое больше.

Если же количество гномов нечётное, то, расставив по кругу «В» и «П», мы продолжим их ставить вместо знаков вопроса, т. е. гномы расположатся по кругу парами: ...ВВППВВПП..., что противоречит тому, что их количество нечётно.

Осталось показать на примере, что любое количество гномов, кратное 4, удовлетворяет условию задачи. Для этого пусть они сначала проголосуют про дракона так: ...ВВППВВПП... (один из «В» — это Торин), а потом про золото единогласно «за».

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *решение в целом верное, но содержит один или более из трёх недочётов*:

1) *не пояснено, почему про дракона проголосовали раньше, чем про золото*;
2) *не приведён пример*;
3) *предполагается, что вопросы о драконе и о золоте обсуждались подряд.*

«∓» — *приведены только верный ответ и пример голосования, его подтверждающий.*

«∓» — *верно разобран только один из двух случаев* (*чётности или нечётности количества гномов*).

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9 класс

9.1. В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек: два мальчика и четыре девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки? (*В круговом шахматном турнире каждый игрок играет с каждым по одной партии. За победу даётся* 1 *очко, за ничью* — 0,5, *за поражение* — 0.)

Ответ: нет, не могли.

Решение. В круговом турнире из шести участников разыгрывается $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ очков, причём каждый участник может набрать не более пяти очков. Если бы мальчики набрали в два раза больше очков, чем девочки, то они набрали бы 10 очков на двоих, т. е. по 5 очков каждый. Но тогда оба должны были выиграть все партии, что невозможно (в личной встрече кто-то из них должен потерять очки).

Утверждение задачи верно и в более общей формулировке: в турнире $3n$ участников, из которых n мальчиков и $2n$ девочек.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение с незначительными пробелами в обоснованиях.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9.2. Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трёхчленов x^2+bx+c и x^2+ax+d известно, что $0<a<b<c<d$. Могут ли эти трёхчлены иметь общий корень?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Поскольку коэффициенты обоих трёхчленов положительны, их корни не могут быть положительными (это можно получить из теоремы Виета или непосредственной подстановкой). Пусть x_0 — общий корень этих трёхчленов. Тогда $x_0^2+bx_0+c=0$ и $x_0^2+ax_0+d=0$, следовательно,

$$x_0^2+bx_0+c=x_0^2+ax_0+d.$$

Преобразовав это равенство, получим, что $x_0(b-a)=d-c$. Из условия задачи следует, что $d-c>0$ и $b-a>0$, т. е. $x_0>0$, и мы получаем противоречие.

Отметим, что условие положительности коэффициентов является существенным. Например, трёхчлены x^2-4x+3 и x^2-5x+4 имеют общий корень 1, при этом $-5<-4<3<4$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«∓» — *доказано только, что если есть общий корень, то он положительный (см. вторую часть решения), иными словами, никак не использовано, что коэффициенты больше нуля.*

«−» — *приведён только верный ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9.3. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM — в точке Q. Известно, что $PQ=3$, а $QT=5$. Найдите длину AC.

Ответ: $AC = 11$.

Решение. Первый способ. Проведём через точку Q прямую, параллельную BC (N и L — точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC соответственно, см. рис. 9.3 *а*). Поскольку AM — медиана треугольника ABC, имеем $LQ = NQ$. Кроме того, $PT \parallel AC$, т. е. PQ — средняя линия в треугольнике ANL. Тогда $AL = 2PQ = 6$. Поскольку $QL \parallel TC$ и $QT \parallel LC$, четырёхугольник $LQTC$ — параллелограмм, откуда $LC = QT = 5$. Таким образом, $AC = AL + LC = 6 + 5 = 11$.

Второй способ. Проведём среднюю линию XM в треугольнике ABC (см. рис. 9.3 *б*). Тогда $XM \parallel PT \parallel AC$, поэтому треугольник APQ подобен треугольнику AXM и треугольник QMT подобен треугольнику AMC, откуда следует, что $\frac{PQ}{XM} = \frac{AQ}{AM}$ и $\frac{QT}{AC} = \frac{QM}{AM}$, т. е. $\frac{PQ}{XM} + \frac{QT}{AC} = 1$. Подставляя значения из условия задачи и учитывая, что $AC = 2MX$, получим $AC = 11$.

Третий способ. Проведём среднюю линию MN в треугольнике ABC (см. рис. 9.3 *в*). Поскольку $QT \parallel AC$, отрезок QT делится отрез-

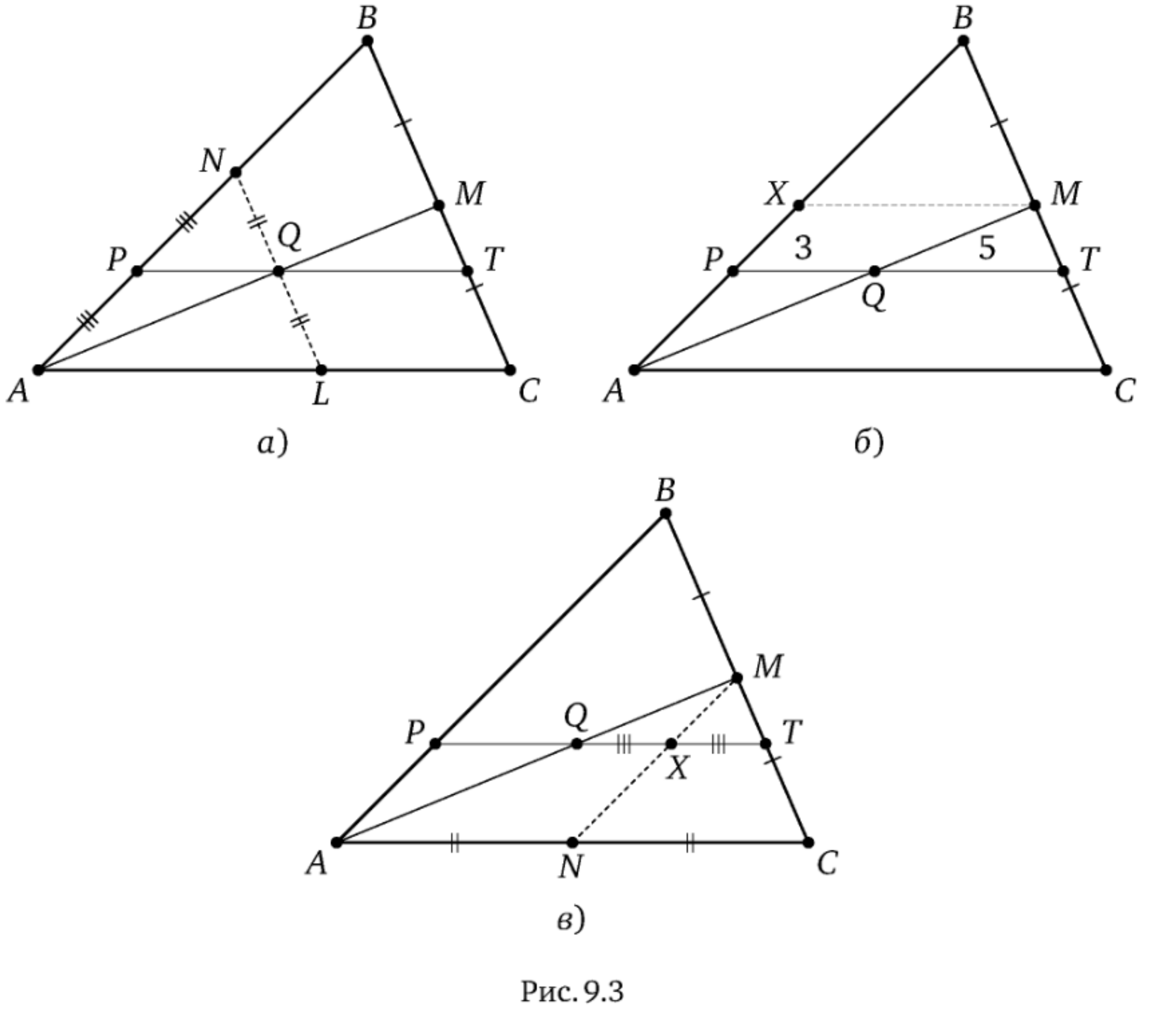


Рис. 9.3

ком MN пополам. Из подобия треугольников APQ и MXQ получим, что $\frac{AQ}{QM}=\frac{3}{2{,}5}=\frac{6}{5}$. Тогда $\frac{MQ}{AM}=\frac{5}{11}$, откуда $\frac{QT}{AC}=\frac{5}{11}$, т. е. $AC=11$.

Четвёртый способ. Запишем теорему Менелая для треугольника BPT и прямой AM: $\frac{PQ}{QT}\cdot\frac{TM}{MB}\cdot\frac{BA}{AP}=1$. Пусть $BP=x$, $AP=y$. Тогда

$$\frac{BT}{TC}=\frac{x}{y} \quad \text{и} \quad \frac{TM}{MB}=\left(\frac{x+y}{2}-y\right):\frac{x+y}{2}=\frac{x-y}{x+y}.$$

Таким образом, $\frac{3}{5}\cdot\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x+y}{y}=1$, откуда $\frac{x-y}{y}=\frac{5}{3}$, т. е. $\frac{x}{y}=\frac{8}{3}$. Так как $\frac{PT}{AC}=\frac{x}{x+y}$, получаем, что $AC=11$.

Критерии проверки

«$+$» — *приведено полное обоснованное решение.*

«$\pm$» — *приведено верное в целом решение, в котором допущена арифметическая ошибка.*

«$\mp$» — *задача не решена, но есть верная идея дополнительного построения.*

«$-$» — *приведён только верный ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

«$-$» — *рассмотрен частный случай (например, задача решена для равнобедренного треугольника).*

9.4. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

Ответ: 91.

Решение. Пример. Рассмотрим девять чисел, равных 91, и число 182. Их сумма равна 1001, а наибольший общий делитель равен 91.

Оценка. Докажем, что значение, большее 91, НОД принимать не может. Заметим, что $1001=7\cdot11\cdot13$. Каждое слагаемое в данной сумме делится на НОД, следовательно, НОД является делителем числа 1001. С другой стороны, меньшее слагаемое в сумме (а значит, и НОД) не больше чем 101. Осталось заметить, что 91 — наибольший из делителей числа 1001, удовлетворяющий этому условию.

Критерии проверки

«$+$» — *приведено полное обоснованное решение.*

«$\pm$» — *приведён верный ответ, доказана оценка, но не приведён пример.*

«$\mp$» — *приведены только верный ответ и пример десяти чисел.*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

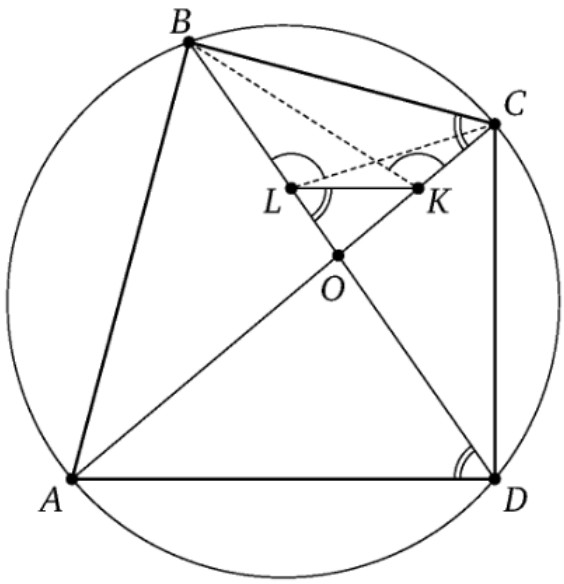


Рис. 9.5

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно так, что $AK=AB$ и $DL=DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

Решение. Первый способ. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, $\angle BAC=\angle BDC$ (см. рис. 9.5). Тогда в равнобедренных треугольниках ABK и DLC равны и углы при основаниях, следовательно, $\angle BLC=\angle BKC$, т. е. четырёхугольник $BCKL$ вписанный. Таким образом, $\angle KLO=\angle BCO=\angle BDA$, т. е. $KL \parallel AD$.

Второй способ. Из условия задачи и подобия треугольников AOB и DOC получим, что $\frac{AO}{DO}=\frac{AB}{DC}=\frac{AK}{DL}$, откуда $\frac{AK}{AO}=\frac{DL}{DO}$ (см. рис. 9.5). Следовательно, $\frac{OK}{AO}=\frac{OL}{DO}$, значит, треугольники AOD и KOL подобны. Тогда $\angle KLO=\angle ADO$, т. е. $KL \parallel AD$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

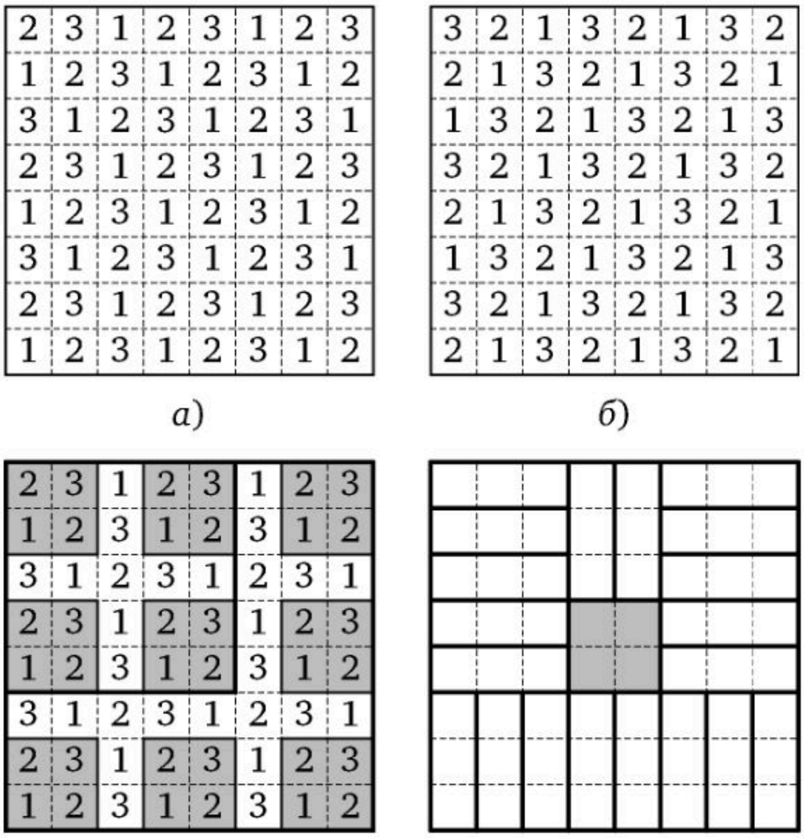
«∓» — *доказано только, что четырёхугольник BCKL вписанный.*

«−» — *рассмотрен только частный случай.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

9.6. Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет*.)

Ответ: могли вырезать любой из девяти квадратов, закрашенных на рис. 9.6 *в*.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 9.6

Решение. Раскрасим шахматную доску в три цвета по диагоналям, начиная с левого нижнего угла доски (см. рис. 9.6 *а*). Тогда при разрезании оставшейся части доски на прямоугольники 1×3 в каждом прямоугольнике окажутся клетки всех трёх цветов. Следовательно, после вырезания квадрата клеток каждого из цветов на доске должно остаться поровну. До вырезания на доске имеются 21 клетка цвета 1, 22 клетки цвета 2 и 21 клетка цвета 3.

Следовательно, вырезали квадрат, в котором две клетки цвета 2 и по одной клетке цветов 1 и 3. Таких квадратов много. Однако заметим, что мы можем раскрасить доску ещё тремя аналогичными способами — начиная с правого нижнего угла доски, с правого верхнего или с левого верхнего (пример раскраски, начинающейся с правого нижнего угла, см. на рис. 9.6 *б*). При каждом способе раскраски количество клеток каждого цвета остаётся неизменным.

Следовательно, могли быть вырезаны только те квадраты, которые при любом способе раскраски содержат две клетки цвета 2 и по одной клетке цветов 1 и 3. Таких квадратов 9 (см. рис. 9.6 *в*).

Покажем, как разрезать оставшуюся доску для каждого из девяти случаев. Заметим, что вырезанный квадрат находится в одном из угловых квадратов 5×5 (см. рис. 9.6 *в*). Таким образом, достаточно показать, как разрезать на прямоугольники 1×3 квадрат 5×5 без одного из угловых квадратов 2×2 и оставшуюся часть доски. Это показано на рис. 9.6 *г*.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведён верный ответ, показано, что другие квадраты не могли быть вырезаны, но не объяснено, как именно проводится разрезание.*

«∓» — *приведён только верный ответ или ответ с указанием, как разрезать оставшуюся часть доски.*

«∓» — *присутствует верная идея раскраски, но допущена ошибка в ответе или решение не доведено до конца.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

10 класс

10.1. Если разделить 2014 на 105, то в частном получится 19 и в остатке тоже 19. На какие ещё натуральные числа можно разделить 2014, чтобы частное и остаток совпали? (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Ответ: ещё на 52, на 1006 и на 2013.

Решение. Если 2014 разделили на натуральное число N и получили в частном и в остатке натуральное число k, то $2014 = Nk + k = k(N+1)$, причём $k < N$. Следовательно, k — делитель числа 2014. Из приведённого в условии примера следует, что $2014 = 105 \cdot 19 + 19 = 19 \cdot 106$, что помогает разложить 2014 на простые множители: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Теперь видно, что, помимо 19, у числа 2014 есть ещё делители 2 и 38, которые порождают такие примеры на деление:

$$2014 = 1 \cdot 2014 = 2013 \cdot 1 + 1,$$
$$2014 = 2 \cdot 1007 = 1006 \cdot 2 + 2 \quad \text{и}$$
$$2014 = 38 \cdot 53 = 52 \cdot 38 + 38.$$

Если же в качестве значений k рассматривать остальные делители числа 2014 (53, 106, 1007 и 2014), то они порождают значения N, не удовлетворяющие неравенству $k < N$, поэтому других решений нет.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение (в ответ может быть как включено, так и не включено число* 105).

«$\pm$» — *доказано, что остаток является делителем числа 2014, и приведён верный ответ, но не доказано, что другие делители не дают новых ответов.*

«$\pm$» — *приведено верное рассуждение, но один из возможных ответов пропущен.*

«$\mp$» — *доказано, что остаток является делителем 2014, но верный ответ не получен.*

«$\mp$» — *приведён верный ответ, и показано только, что он удовлетворяет условию.*

«$-$» — *приведён только ответ.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

10.2. Докажите, что если в выражении $(x^2 - x + 1)^{2014}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

Решение. Первый способ. Докажем, что у полученного многочлена коэффициент при x будет отрицательным. Подобные слагаемые с буквенной частью x образуются при перемножении 2014 одинаковых скобок следующим образом: в одной из скобок берётся слагаемое $-x$, а в остальных скобках — слагаемое 1. Следовательно, после приведения подобных слагаемых коэффициент при x будет равен -2014.

Аналогичные рассуждения можно провести и для коэффициента при x^{4027}, причём в обоих случаях достаточно объяснить, почему отрицательно каждое из слагаемых с соответствующей буквенной частью, а сам коэффициент можно не вычислять.

Второй способ. Найдём сумму коэффициентов после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых. Она будет равна значению полученного многочлена при $x = 1$. Но это же значение получится, если подставить $x = 1$ в исходное выражение $(x^2 - x + 1)^{2014}$. Следовательно, эта сумма равна 1. Заметим, что в полученном многочлене коэффициент при x^{4028} (старший член) равен 1 и свободный член равен 1. Следовательно, должен быть хотя бы один отрицательный коэффициент.

Критерии проверки

«$+$» — *приведено полное обоснованное решение (любым из способов).*

«$\pm$» — *при решении первым способом объяснено, почему коэффициент при x (или при x^{4027}) получится отрицательным, но сам коэффициент вычислен неверно.*

«$\mp$» — *верно указано, какой именно коэффициент будет отрицательным, но не объяснено, почему это так.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

10.3. В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек A, B, C, D, E и F. Известно, что отрезки AB и DE, BC и EF, CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

Решение. Первый способ. В плоскости ABC есть пара пересекающихся прямых AB и BC, которые соответственно параллельны прямым DE и EF в плоскости DEF. Следовательно, плоскости ABC и DEF параллельны (по признаку параллельности плоскостей), а CD и AF — отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, значит, $CD = AF$ (по свойству параллельных прямых, пересекающих две параллельные плоскости).

Аналогично доказывается, что $AB = DE$ и $BC = EF$.

Второй способ. Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{FA}$ равна $\overrightarrow{0}$, причём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ некомпланарные. Так как $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$, имеем $\overrightarrow{DE} = k_1\overrightarrow{AB}$, где k_1 — некоторое число. Аналогично $\overrightarrow{EF} = k_2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FA} = k_3\overrightarrow{CD}$. Тогда

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \\ = (1+k_1)\overrightarrow{AB} + (1+k_2)\overrightarrow{BC} + (1+k_3)\overrightarrow{CD}.$$

В силу некомпланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ коэффициенты при каждом из слагаемых должны равняться нулю, т. е. $k_1 = k_2 = k_3 = -1$, а это и означает равенство рассматриваемых отрезков.

Отметим, что условие расположения точек не в одной плоскости является существенным. Действительно, если заданные шесть точек лежат в одной плоскости, то указанного равенства отрезков может и не быть. Например, «отрежем» от каждой вершины правильного треугольника со стороной 4 по правильному треугольнику со стороной 1 и получим шестиугольник $ABCDEF$, в котором выполняется попарная параллельность отрезков, но не выполняется их равенство. Поэтому верное решение задачи должно по существу использовать тот факт, что заданные точки не лежат в одной плоскости.

Критерии проверки

«$+$» — *приведено полное обоснованное решение (любым из способов).*

«$\pm$» — *приведено верное в целом рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

10.4. Каждый день с понедельника по пятницу ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня — понедельник, среду и пятницу?

Ответ: 50.

Решение. Если в каждый из первых четырёх дней старик ловил по 25 рыб, а в пятницу не поймал ничего, то условия задачи выполнены и за указанные три дня поймано ровно 50 рыб.

Докажем, что в указанные дни меньше чем 50 рыб поймано быть не могло. Действительно, пусть в эти дни поймано меньше чем 50 рыб. Так как во вторник и в четверг старик поймал рыб не больше, чем в понедельник и в среду, во вторник и в четверг также поймано меньше чем 50 рыб. Тем самым, в сумме за пять дней поймано меньше ста рыб, что противоречит условию.

Оценку (вторую часть решения) можно записать алгебраически, причём различными способами. Пусть с понедельника по пятницу старик последовательно ловил $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$ *рыб.*

1. *Если* $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=100$, *то*

$$a_1+a_3+a_5 = 100-(a_2+a_4) \geqslant 100-(a_1+a_3).$$

Следовательно, $2a_1+2a_3+a_5 \geqslant 100$. *Так как* $2a_5 \geqslant a_5$, *мы получаем, что* $a_1+a_3+a_5 \geqslant 50$.

2. *Так как* $a_1 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2}$, $a_3 \geqslant \frac{a_3+a_4}{2}$, $a_5 \geqslant \frac{a_5}{2}$, *мы получаем, что*

$$a_1+a_3+a_5 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_5}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2} = 50.$$

Критерии проверки

«$+$» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*
«$\mp$» — *приведены только верный ответ и пример.*
«$\mp$» — *доказана только оценка.*
«$-$» — *приведён только ответ.*
«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

Жюри полагает, что сюжет задачи никак не должен навести решающего на мысль, что каждый день старик обязательно ловит хотя бы одну рыбку (да и в сказке Пушкина старику доводилось вытаскивать лишь тину). Однако если решающий чётко демонстрирует такое понимание усло-

вия и обоснованно находит ответ 51, *то ему следует поставить оценку* «+». *Промежуточные критерии на эту ситуацию не распространяются.*

10.5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

Ответ: $45°$.

Решение. Пусть H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Тогда высота AT треугольника ABC содержит медиану треугольника AMN, т. е. пересекает отрезок MN в его середине — точке E (см. рис. 10.5 *а*, *б*). Далее можно рассуждать поразному.

Первый способ. Так как $MN \parallel AB$, треугольники ENN и ATB подобны (см. рис. 10.5 *а*), следовательно, $\frac{TN}{TB} = \frac{TE}{TA} = \frac{EN}{AB} = \frac{1}{4}$. Пусть $TN = x$, $TE = y$, тогда $BN = 3x$, $AE = 3y$. Следовательно, $CN = CN - TN = 2x$, а $EH = \frac{1}{3}AE = y$ (по свойству точки пересечения медиан треугольника).

Заметим, что в прямоугольных треугольниках CTH и BTA выполняются соотношения $\frac{CT}{BT} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$ и $\frac{HT}{AT} = \frac{2y}{4y} = \frac{1}{2}$. Значит, эти треугольники подобны. Следовательно, $\angle TCH = \angle TBA$. Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому эти равные углы являются острыми углами прямоугольного треугольника CQB, т. е. каждый из них равен $45°$.

Второй способ. Отметим точку K — середину стороны AB (см. рис. 10.5 *б*). Тогда $AMNK$ — параллелограмм, а его диагональ MK проходит через середину AN, поэтому она проходит и через точку H.

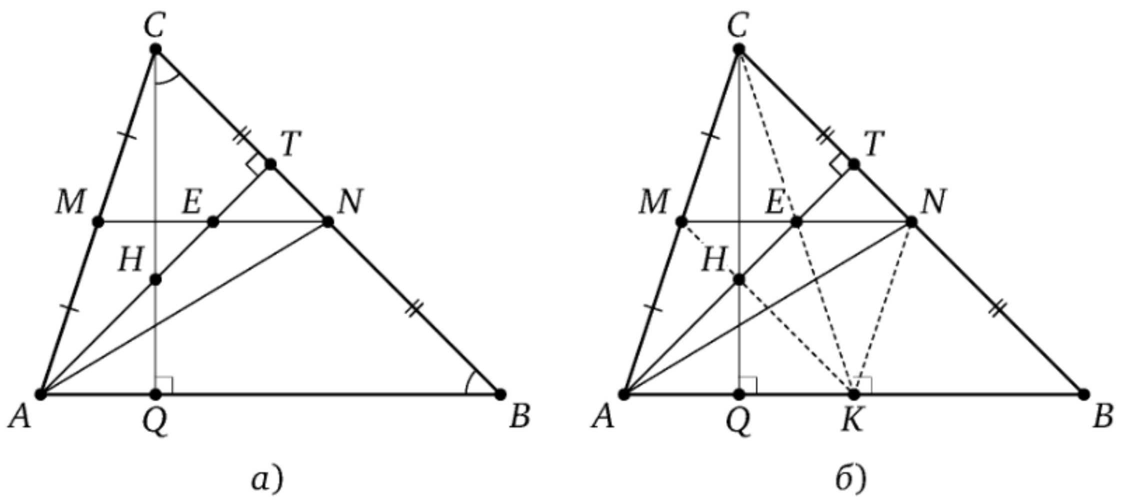


Рис. 10.5

Так как $MH \parallel BC$, треугольники EMH и ENT равны (по стороне и двум прилежащим углам), значит, $EH = ET$. Медиана CK треугольника ABC проходит через точку E и делится в ней пополам, поэтому $CHKT$ — параллелограмм, следовательно, $TK \parallel CH$.

Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому $TK \perp AB$. Таким образом, TK является высотой и медианой прямоугольного треугольника ATB, значит, этот треугольник равнобедренный, поэтому $\angle ABC = 45°$.

Существуют и другие способы решения. В частности, несложно доказать, что в данном треугольнике прямая Эйлера OH (O — центр описанной окружности треугольника ABC) параллельна AB. Тогда выполняется равенство $\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\angle B = 3$ *(см., например, Прасолов В. В. «Задачи по планиметрии» М.: МЦНМО,* 2007. *Задача* № 5.110). *Используя этот факт и некоторые дополнительные соображения, которые следуют из условия задачи, можно вычислить не только угол ABC, но и остальные углы данного треугольника.*

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное в целом рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

10.6. В одной из вершин шестиугольника лежит золотая монета, а в остальных ничего не лежит. Кощей Бессмертный чахнет над златом и каждое утро снимает с одной вершины произвольное количество монет, после чего тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монет. Если к исходу какого-то дня во всех вершинах будет поровну монет, то Кощей станет Властелином Мира. Докажите, что хоть злата у него сколько угодно, но Властелином Мира ему не бывать.

Решение. Занумеруем вершины шестиугольника начиная с той, где лежит монета, последовательными натуральными числами от 1 до 6 (двигаясь, например, против часовой стрелки). Обозначим через $n_1, n_2, \ldots, n_6$ количества монет, лежащих в вершинах $1, 2, \ldots, 6$ соответственно. Пусть $N_1 = n_1 + n_3 + n_5$, $N_2 = n_2 + n_4 + n_6$.

Рассмотрим разность $N_1 - N_2$ и докажем, что при указанных действиях Кощея остаток от её деления на 7 не изменяется. Действительно, если из какой-то вершины шестиугольника Кощей забирает

x монет, а в соседнюю вершину добавляет $6x$ монет, то значение $N_1 - N_2$ изменяется на $7x$.

Заметим, что в начальный момент $N_1 - N_2 = 1$. Поэтому цель Кощея — уравнять количество монет во всех вершинах, а значит, сделать так, чтобы $N_1 - N_2$ было равно нулю, — недостижима.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное в целом рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11 класс

11.1. Не используя калькулятора, определите знак числа

$$(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1).$$

Ответ: отрицательное число.

Решение. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому из неравенства $0 < \sin 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\sin(\sin 1) < \sin 1$, т. е. $\sin(\sin 1) - \sin 1 < 0$. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому из неравенства $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\cos(\cos 1) > \cos 1$, т. е. $\cos(\cos 1) - \cos 1 > 0$.

Таким образом, $(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1) < 0$.

Критерии проверки

«+» — *приведено полное обоснованное решение.*

«±» — *приведено верное в целом решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11.2. Какое наименьшее количество множителей требуется вычеркнуть из числа $99! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99$ так, чтобы произведение оставшихся множителей оканчивалось на 2?

Ответ: 20 множителей.

Решение. Из числа 99! необходимо вычеркнуть все множители, кратные 5, иначе произведение будет оканчиваться на 0. Всего таких множителей (оканчивающихся на 0 или на 5) 19.

Произведение оставшихся множителей оканчивается на 6. Действительно, так как произведение $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$ оканчивается на 6, аналогичные произведения в каждом следующем десятке также оканчиваются на 6. Следовательно, достаточно вычеркнуть ещё один множитель, например 8. После этого произведение оставшихся множителей будет оканчиваться на 2.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы.*

«∓» — *приведены верный ответ и верный пример, но не объяснено, почему указанное количество вычеркнутых множителей наименьшее.*

«∓» — *приведён верный ответ, но в рассуждениях неверно указаны какие-то из вычёркиваемых чисел.*

«∓» — *имеется верный ход решения, но допущена ошибка, повлиявшая на ответ.*

«∓» — *приведена оценка без примера.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11.3. Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB=AC=AD=BC$, а суммы плоских углов при каждой из вершин B и C равны по $150°$?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такой тетраэдр существует. Тогда его грани DAB и DAC — равнобедренные треугольники. Пусть $\angle ADB = \angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, $\angle DCB = \gamma$, $\angle ADC = \angle ACD = \delta$, тогда $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma$ (см. рис. 11.3).

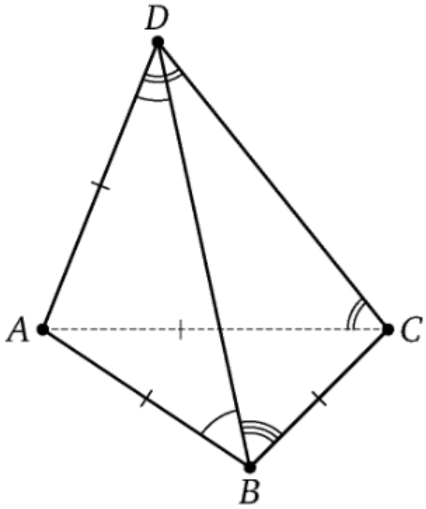


Рис. 11.3

Так как треугольник ABC равносторонний, из условия задачи следует, что $\alpha+\beta=\gamma+\delta=90^\circ$, значит, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^\circ$. Тогда $\angle BDC=180^\circ-\beta-\gamma=\alpha+\delta$, т. е. $\angle BDC=\angle BDA+\angle CDA$. Это противоречит свойству трёхгранного угла: в любом трёхгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего. Полученное противоречие показывает, что тетраэдра, удовлетворяющего условию, не существует.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы.*

«∓» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

Указанное выше свойство трёхгранного угла достаточно сформулировать. Наличие или отсутствие его доказательства в работе школьника не влияет на оценку решения.

11.4. При каких значениях x и y верно равенство

$$x^2+(1-y)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}?$$

Ответ: при $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

Решение. Первый способ. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$$x^2+(1-y)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3} \iff 2x^2+2y^2-2xy-2y+\frac{2}{3}=0 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}(4x^2-4xy+y^2)+\frac{3}{2}\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=0 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}(2x-y)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=0 \iff \begin{cases} 2x-y=0, \\ y-\frac{2}{3}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Второй способ. Перепишем уравнение в виде

$$x^2-yx+\left(y^2-y+\frac{1}{3}\right)=0$$

и рассмотрим его как квадратное уравнение относительно x. Тогда

$$D=y^2-4y^2+4y-\frac{4}{3}=-3\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=-3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2.$$

Квадратное уравнение имеет корни, если $D=-3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\geqslant 0$, т. е. если $y=\frac{2}{3}$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим, что $x=\frac{1}{3}$.

Третий способ. Используя неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим (для неотрицательных чисел) и тот факт, что $|a|\geqslant a$, получим

$$\sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2+(x-y)^2}{3}}\geqslant\frac{|x|+|1-y|+|x-y|}{3}\geqslant\frac{x+(1-y)+(y-x)}{3}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $x^2+(1-y)^2+(x-y)^2\geqslant\frac{1}{3}$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=1-y=y-x$, т. е. при $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

Четвёртый способ. Пусть

$$a=x,\quad b=1-y,\quad c=y-x,$$

тогда

$$a+b+c=1\quad\text{и}\quad a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}.$$

Рассмотрим векторы $\vec{m}(a;b;c)$, $\vec{n}(1;1;1)$. Найдем их модули:

$$|\vec{m}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad|\vec{n}|=\sqrt{3}.$$

Таким образом, $\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$, следовательно, рассматриваемые векторы коллинеарны. Тогда их координаты пропорциональны: $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$, т. е. $a=b=c=\frac{1}{3}$. Значит, $x=1-y=y-x$, следовательно, $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение (любым из способов).*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы.*

«∓» — *приведён верный ход решения, но допущены ошибки, которые привели к неверному ответу.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*

11.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность ω в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность ω в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Решение. Первый способ. Докажем сначала, что $OD = OF$. Для этого не нужна окружность с центром в точке A. Рассмотрим чертёж без неё (см. рис. 11.5 *а*). Пусть в окружности с центром C центральный угол BCD равен 2α. Тогда вписанный угол DFB равен α.

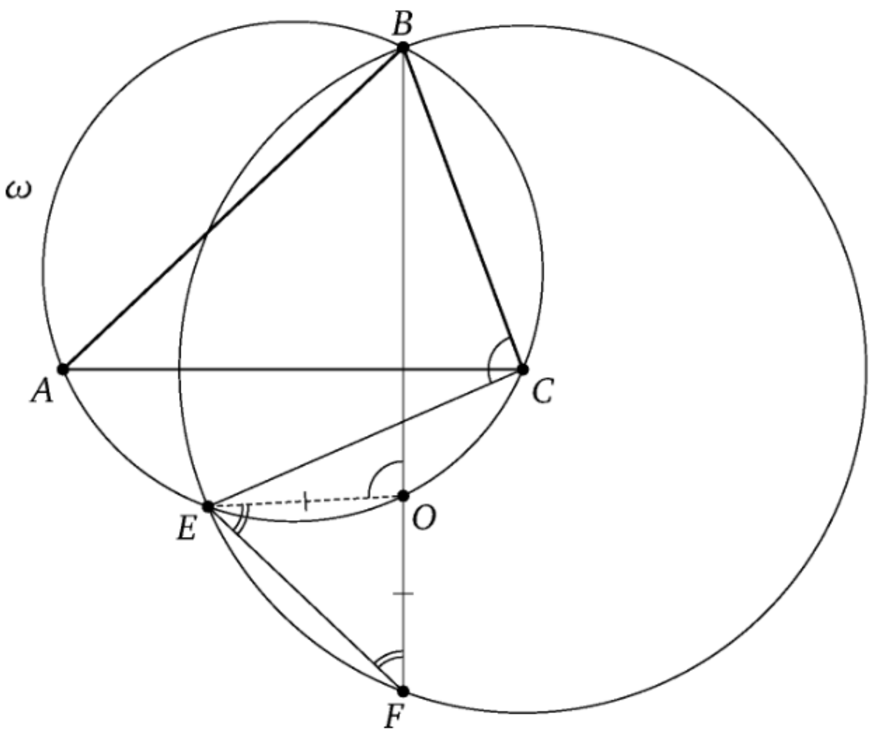


Рис. 11.5 *а*)

В окружности ω углы BCD и BOD вписанные и опираются на одну дугу, значит, $\angle BOD = \angle BCD = 2\alpha$. Угол BOD — внешний угол треугольника DOF. Следовательно, $\angle ODF = \angle BOD - \angle OFD = \alpha$, т. е. треугольник DOF равнобедренный: $OD = OF$.

Аналогично рассмотрев окружность с центром A, можем доказать, что $OF = OE$. Следовательно, O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Второй способ.

Лемма. *Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Через точку Q проведена прямая, вторично пересекающая окружности в точках A и B соответственно. Тогда треугольники PO_1O_2 и PAB подобны.*

Доказательство. Возможны два случая взаимного расположения точек Q, A и B (см. рис. 11.5 *б*, *в*), но доказательство от этого не зависит. Пусть $\angle QBP = \beta$, тогда $\angle QO_2P = 2\beta$. Луч O_2O_1 является бис-

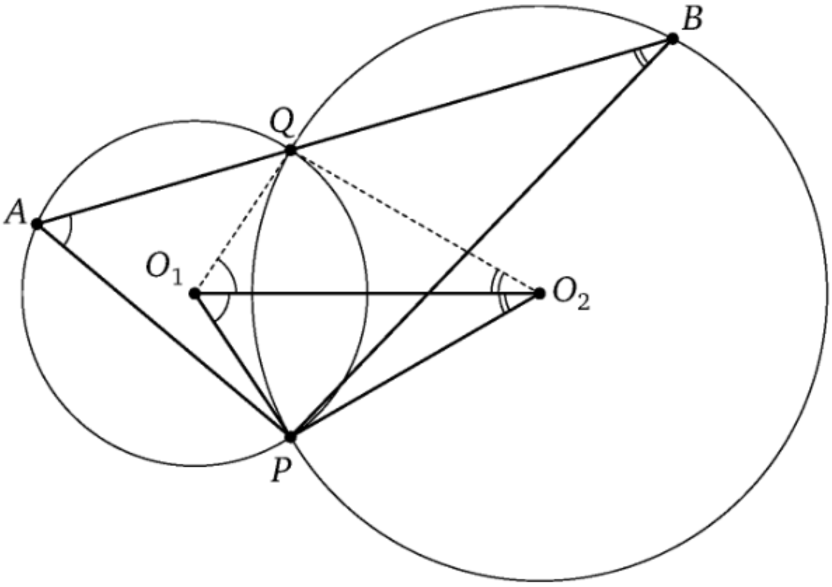


Рис. 11.5 *б*)

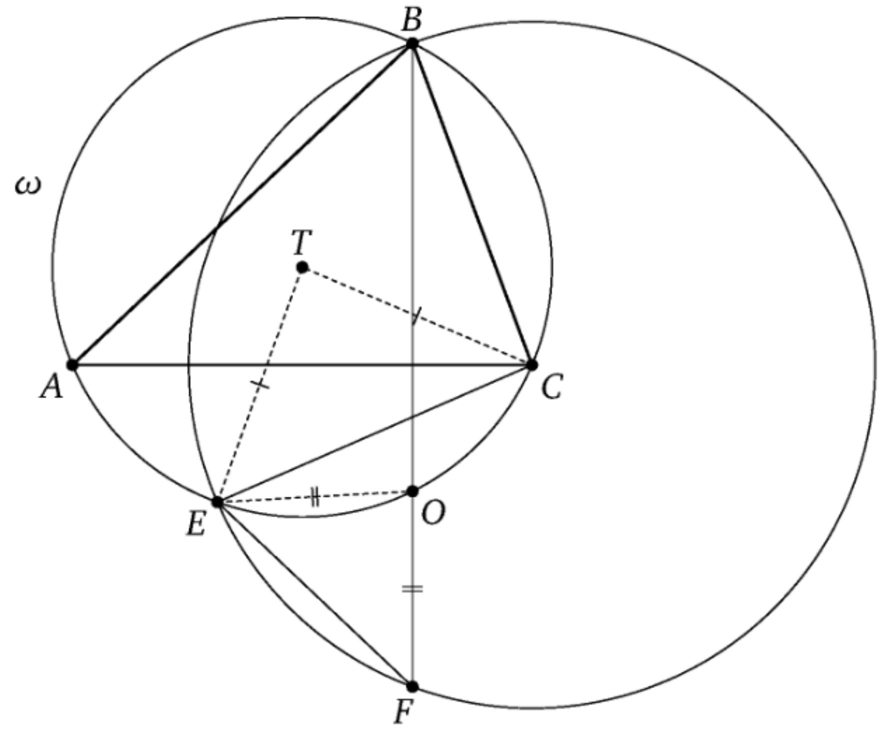


Рис. 11.5 *в*)

сектрисой угла QO_2P. Следовательно, $\angle O_1O_2P = \beta = \angle QBP$. Аналогично $\angle O_2O_1P = \angle QAP$. Таким образом, треугольники PO_1O_2 и PAB подобны. □

Перейдём теперь к решению задачи. Докажем сначала, что $OD = OF$. Для этого опять рассмотрим чертёж без окружности с центром в точке A (см. рис. 11.5 *г*).

Пусть T — центр окружности ω, описанной около треугольника ABC. Тогда по лемме треугольники DOF и DTC подобны. Треуголь-

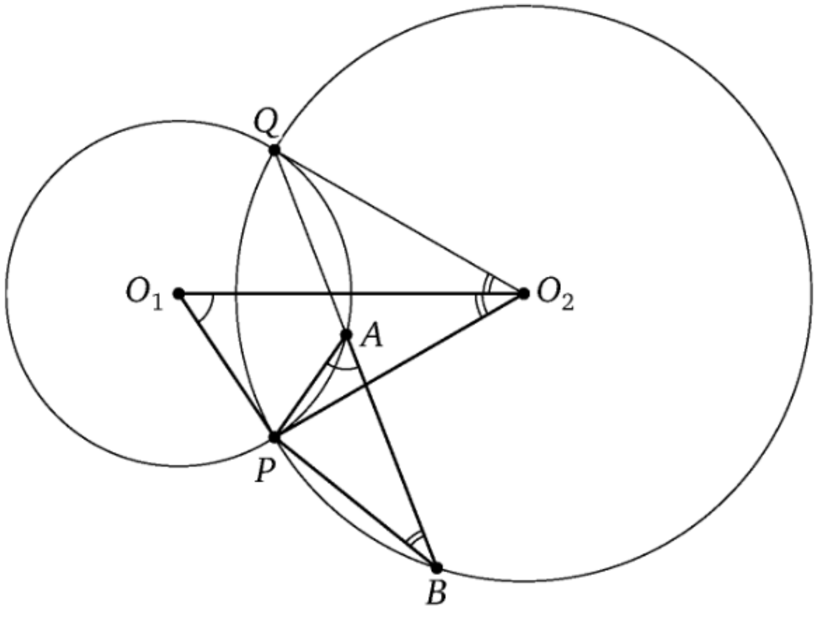


Рис. 11.5 *г*)

ник DTC равнобедренный: $DT = TC$. Следовательно, треугольник DOF также равнобедренный: $DO = OF$, что и требовалось.

Аналогично доказывается, что $OF = OE$. Следовательно, O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Критерии проверки

«$+$» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение (любым из способов).*

«$\pm$» — *приведены верный ответ и верное в целом решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы.*

«$\mp$» — *в работе есть верная идея решения, но до конца оно не доведено.*

«$-$» — *задача не решена или решена неверно.*

Лемма о подобии может быть использована без доказательства только при условии, что она сформулирована в явном виде.

11.6. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

Ответ: процесс обязательно прекратится.

Решение. Первый способ. Пусть исходная последовательность содержит n единиц, тогда её удобно записать в виде

$$\underbrace{0\ldots0}_{a_1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_n}1\underbrace{0\ldots0}_{a_{n+1}},$$

где числа a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} обозначают количество нулей, стоящих слева от самой левой единицы, между соседними единицами и после самой правой единицы соответственно (какие-то из этих чисел могут быть равны нулю). Заметим, что указанная операция не изменяет количество единиц в последовательности, поэтому замена «01» на «1000» означает, что слева от некоторой единицы стало на один нуль меньше, а справа стало на три нуля больше. Заметим также, что количество возможных операций зависит от количества единиц, суммарного количества нулей, стоящих левее каждой единицы, и количества нулей, возникших в результате выполнения всех операций. Оно не зависит от порядка выполнения операций, так как если две единицы оказались рядом, то с правой единицей указанную операцию выполнить невозможно (относительный порядок единиц в последовательности не изменяется).

Таким образом, с участием самой левой единицы можно провести a_1 операций, с участием следующей единицы — $3a_1+a_2$ операций, с участием следующей единицы — $3(3a_1+a_2)+a_3$ операций и т. д., с участием самой правой единицы — $3^{n-1}a_1+3^{n-2}a_2+\ldots$ $\ldots+3a_{n-1}+a_n$ операций.

Так как с каждой из единиц можно совершить конечное количество операций, со всем набором тоже можно совершить только конечное количество операций.

Отметим, что указывать точное количество операций не обязательно — важно показать, что их конечное число. Например, решение можно было завершить следующим образом: если левее некоторой единицы расположено x нулей, а правее — y нулей, то с этой единицей можно совершить не более чем x операций, при этом правее этой единицы окажется не более чем $3x+y$ нулей, т. е. если непосредственно левее какой-либо единицы расположено конечное количество нулей, то с этой единицей можно сделать конечное количество операций и правее неё образуется конечное количество нулей.

Таким образом, с участием первой единицы можно провести a_1 (конечное количество) операций, а правее неё образуется $3a_1+a_2$ (конечное количество) нулей. Аналогично с участием второй единицы можно провести конечное количество операций, а правее неё образуется конечное количество нулей и т. д., т. е. с каждой очередной единицей можно совершить конечное количество операций, а значит, со всей последовательностью можно совершить конечное количество операций.

Второй способ. Каждую операцию можно понимать как «ход» какой-то единицы: единица меняется местами со стоящим перед ней нулём, а потом после этого нуля появляются ещё два. Пусть ежеминутно делается один такой «ход» и процесс продолжается бесконечно долго. Тогда найдутся единицы, которые «ходили» бесконечное количество раз. Рассмотрим самую левую из них и покрасим её в красный цвет. Все единицы, стоящие левее красной, через несколько минут перестанут перемещаться. После этого красная единица каждым своим «ходом» будет перемещаться ближе к началу последовательности, т. е. сделает ещё конечное количество «ходов», а это противоречит тому, как она выбиралась.

Критерии проверки

«+» — *приведены верный ответ и полное обоснованное решение.*

«±» — *приведены верный ответ и верное в целом решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы (например, в обосновании того, что количество операций не зависит от их порядка).*

«±» — *в подсчёте максимального количества операций есть ошибка, но независимость количества операций от их порядка доказана строго.*

«∓» — *в работе есть верная идея решения, но до конца оно не доведено.*

«∓» — *проведено рассуждение о конечности количества операций (или подсчёт этого количества), но независимость от порядка операций никак не обоснована.*

«∓» — *рассуждения приведены для конкретной последовательности операций.*

«−» — *приведён только ответ.*

«−» — *задача не решена или решена неверно.*