ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко

Задачи заочных интернет-олимпиад

УДК 372.851
ББК 22.17я72
В93

Высоцкий И. Р., Ященко И. В.
Задачи заочных интернет-олимпиад по теории вероятностей и статистике.
М.: МЦНМО, 2017.
312 с.
ISBN 978-5-4439-3136-4

Сборник олимпиадных задач по теории вероятностей и статистике предназначен в первую очередь для школьников, интересующихся этими науками, а также для руководителей школьных кружков и учителей математики. Цель публикации состоит не столько в том, чтобы найти будущих участников олимпиад, сколько в том, чтобы познакомить заинтересованного читателя с новым для него кругом занимательных задач и математических понятий.

Подготовлено на основе книги:
Высоцкий И. Р., Ященко И. В. Задачи заочных интернет-олимпиад по теории вероятностей и статистике. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2017. — 312 с. — ISBN 978-5-4439-1136-6

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

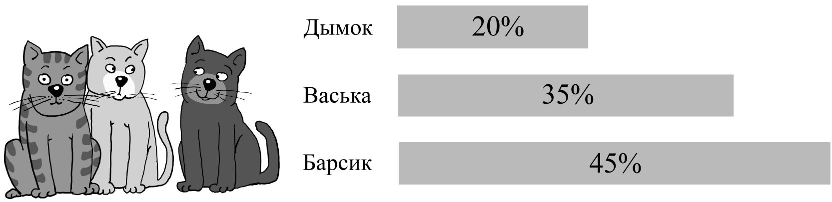
ISBN 978-5-4439-3136-4

I. Пригласительные туры

2017 год

Вариант 1

1. (от 6 класса, 1 балл). В одном из сообществ одной социальной сети шло голосование: какой из котят на фото самый симпатичный. К утру голоса распределились так:



К вечеру голосов прибавилось, но все новые голоса были за Барсика. В результате у Дымка осталось только 16 % голосов. Сколько процентов голосов стало вечером у Васьки?

2. (от 7 класса, 1 балл). Найдите медиану набора длин:

2 м 30 см, 250 мм, 0,02 км, 0,002 км, 2700 см, 2800 мм, 240 см.

3. (от 6 класса, 1 балл). В классе не больше 40 человек, и среди них есть те, кого зовут Коля. Вероятность того, что случайно выбранный ученик выше всех Коль, равна $\frac{2}{5}$, а вероятность того, что случайно выбранный ученик ниже всех Коль, равна $\frac{3}{7}$. Какое наибольшее количество Коль может быть в классе?

4. (от 6 класса, 1 балл). Имеется резинка и стеклянные шарики-бусины: четыре одинаковых красных, две одинаковых синих и две одинаковых зеленых. Нужно все восемь бусин нанизать на резинку последовательно, чтобы получился браслет. Сколько различных браслетов можно составить так, чтобы бусины одного цвета не оказались рядом? (Считайте, что застёжки нет, а узелок на резинке незаметен).

5. (от 6 класса, 1 балл). Горлум загадывает Бильбо девять загадок. Найдите самое вероятное из событий:

$A = \{$Бильбо отгадает больше четырёх загадок$\}$;

$B = \{$Бильбо отгадает не меньше четырёх загадок$\}$;

$C = \{$Бильбо отгадает от четырёх до восьми загадок$\}$;

$D = \{$Бильбо не отгадает меньше семи загадок$\}$.

6. (от 8 класса, 1 балл). Для тестирования новой программы компьютер выбирает случайное действительное число A из отрезка $[1; 2]$ и заставляет программу решать уравнение $3x+A=0$. Найдите вероятность того, что корень этого уравнения меньше, чем $-0{,}4$.

7. (от 6 класса, 2 балла). В классе у Марии Ивановны прошёл ежегодный тест по английскому языку. Оказалось, что в обеих группах А и Б средний балл понизился по сравнению с прошлым годом (см. таблицу).

Группа А		
1	Антонов	31
2	Белоусова	46
3	Григорьев	52
4	Дёмин	51
5	Исаев	32
6	Калинина	41
7	Морских	59
8	Попов	32
9	Сидоров	44
10	Филипповская	54
Среднее		44,2
Прошлый год		44,4

Группа Б		
1	Аверьянов	36
2	Воронова	49
3	Данилов	31
4	Злыднева	35
5	Ларионов	48
6	Мельникова	32
7	Озерова	35
8	Рассудова	47
9	Уварова	35
10	Яхонтов	40
Среднее		38,8
Прошлый год		39,2

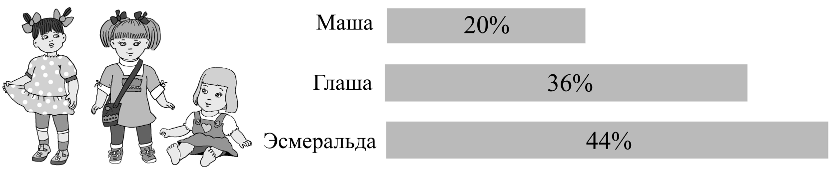
Мария Ивановна должна писать отчёт, но знает, что директор школы будет недоволен, поскольку считает, что средний балл должен каждый год расти. Баллы менять нельзя, но Мария Ивановна может переводить учеников из одной группы в другую. Может ли она сделать так, что средний балл в каждой группе окажется выше, чем в прошлом году? Если нет — объясните, почему. Если да — покажите, как должна поступить Мария Ивановна.

8. (от 8 класса, 3 балла). В торговом центре три автомата продают кофе. В течение дня первый автомат ломается с вероятностью 0,4, второй — с вероятностью 0,3. Каждый вечер приходит механик Иванов и чинит все сломанные автоматы. Однажды Иванов написал в отчете, что математическое ожидание поломок в неделю равно 12. Докажите, что Иванов преувеличивает.

9. (от 9 класса, 3 балла). Когда Рассеянному Учёному приходит в голову гениальная идея, он записывает её на листке бумаги, но тут же понимает, что идея не гениальная, комкает лист и кидает под стол, где стоят две мусорные корзины. Учёный промахивается мимо первой корзины с вероятностью p (где $p > 0{,}5$), и с такой же вероятностью он промахивается мимо второй. За утро Учёный бросил под стол пять скомканных гениальных идей. Найдите вероятность того, что в каждой корзине оказалось хотя бы по одной из утренних идей.

Вариант 2

1. (от 6 класса, 1 балл). В одной социальной сети шло голосование: какая из трёх кукол, представленных на конкурсе юных мастеров, самая выразительная. К утру голоса распределились так:



К вечеру голосов прибавилось, но все новые голоса были за Эсмеральду. В результате у Глаши осталось только 27 % голосов. Сколько процентов голосов вечером стало у Маши?

2. (от 7 класса, 1 балл). Найдите медиану набора масс:

340 г; 3 кг 250 г; 0,003 т; 0,03 т; 35 кг; 3340 г; 3 кг 400 г.

3. (от 6 класса, 1 балл). В классе не больше 35 человек, и среди них есть те, кого зовут Петя. Вероятность того, что случайно выбранный ученик выше всех Петь, равна $\frac{1}{6}$, а вероятность того, что случайно выбранный ученик ниже всех Петь, равна $\frac{3}{5}$. Какое наибольшее количество Петь может быть в классе?

4. (от 6 класса, 1 балл). Имеется резинка и стеклянные шарики-бусины: шесть одинаковых красных, две одинаковых синих и четыре одинаковых зелёных. Нужно все двенадцать бусин нанизать на резинку последовательно, чтобы получился браслет. Сколько различных браслетов можно составить так, чтобы бусины одного цвета не оказались рядом? (Считайте, что застёжки нет, а узелок на резинке незаметен).

5. (от 6 класса, 1 балл). Семиклассник Сергеев часто опаздывает в школу. До конца четверти осталось десять учебных дней. Какое из следующих событий наименее вероятно?

$A = \{$За эти 10 дней Сергеев опоздает от семи до девяти раз$\}$;

$B = \{$За эти 10 дней Сергеев не опоздает меньше четырёх раз$\}$;

$C = \{$За эти 10 дней Сергеев опоздает не меньше пяти раз$\}$;

$D = \{$За эти 10 дней Сергеев опоздает больше пяти раз$\}$.

6. (от 8 класса, 1 балл). Для тестирования новой программы компьютер выбирает случайное действительное число A из отрезка $[1; 2]$ и заставляет программу решать уравнение $6x+A=0$. Найдите вероятность того, что корень этого уравнения больше, чем $-0{,}25$.

7. (от 6 класса, 2 балла). В классе у Марии Ивановны прошёл ежегодный тест по английскому языку. Оказалось, что в обеих группах А и Б средний балл понизился по сравнению с прошлым годом (см. таблицу).

Группа А		
1	Антропов	35
2	Белобородов	62
3	Глядешина	55
4	Долматов	57
5	Жарова	35
6	Ильин	54
7	Лопатин	47
8	Ноготкова	49
9	Суздальский	34
10	Филин	44
Среднее		47,2
Прошлый год		47,5

Группа Б		
1	Аладьева	51
2	Воронов	38
3	Гусев	34
4	Елина	43
5	Зорич	50
6	Касаткина	38
7	Моисеев	52
8	Облакова	38
9	Рысьев	35
10	Фофанов	39
Среднее		41,8
Прошлый год		42,2

Мария Ивановна должна писать отчёт, но знает, что директор школы будет недоволен, поскольку считает, что средний балл должен каждый год расти. Баллы менять нельзя, но Мария Ивановна может переводить учеников из одной группы в другую. Может ли она сделать так, что средний балл в каждой группе окажется выше, чем в прошлом году? Если нет — объясните, почему. Если да — покажите, как должна поступить Мария Ивановна.

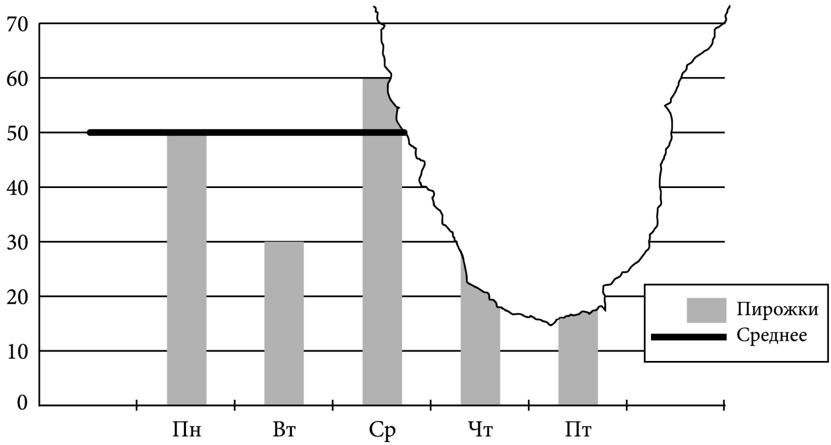
8. (от 8 класса, 3 балла). В торговом центре три автомата продают кофе. В течение дня первый автомат ломается с вероятностью 0,3, второй — с вероятностью 0,2. Каждый вечер приходит инженер Петров и чинит все сломанные автоматы. Однажды Петров написал в отчёте, что математическое ожидание поломок в неделю равно 3,3. Докажите, что Петров преуменьшает.

9. (от 9 класса, 3 балла). Когда Рассеянному Учёному приходит в голову гениальная идея, он записывает её на листке бумаги, но тут же понимает, что идея не гениальная, комкает лист и кидает под стол, где стоят две мусорные корзины. Учёный попадает в первую корзину с вероятностью p (где $p < 0{,}5$), и с такой же вероятностью он попадает во вторую. За утро Учёный бросил под стол шесть скомканных гениальных идей. Найдите вероятность того, что в каждой корзине оказалось хотя бы по одной из утренних идей.

2016 год

Вариант 1

1. (6—11 классы, 1 балл). На диаграмме показано, сколько пирожков Робин Бобин Барабек съедал во все рабочие дни недели. Для наглядности среднее число съеденных пирожков отмечено горизонтальной линией. Но случилось так, что кусок диаграммы Робин тоже откусил и съел. Известно лишь, что в четверг было съедено ровно 20 % пирожков, съеденных за все пять дней. Сколько пирожков Робин съел в пятницу?



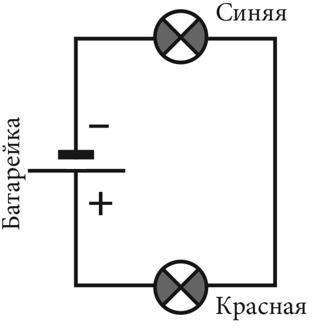
2. (6—11 классы, 1 балл). Сова утверждает, что в среднем три шнурка из четырёх, которые можно найти в лесу, ей не нужны, поскольку они слишком длинные для дверного звонка. Иа утверждает, что в среднем четыре из пяти шнурков из леса ему не нужны, поскольку они слишком короткие, чтобы сделать из них хвост для ослика. Оба правы. Какова вероятность того, что случайно найденный в лесу шнурок не нужен ни Сове, ни Иа?

3. (6—11 классы, 1 балл). Есть три карточки. Обе стороны первой карточки синие. Обе стороны второй карточки красные, а стороны третьей карточки разных цветов: одна синяя, а другая красная. Выбирают случайную карточку и поворачивают её случайной стороной вверх. Эта сторона оказалась синей. Какова вероятность того, что другая сторона тоже синяя?

4. (7—11 классы, 1 балл). Петя и Вася одновременно бросают по одной игральной кости. Выигрывает тот, у кого выпало больше очков. Если выпало поровну, наступает ничья. Какова вероятность того, что Петя выиграет?

5. (7—11 классы, 1 балл). В числовом наборе 100 чисел. Если выкинуть одно число, то медиана оставшихся чисел станет 52. Если выкинуть другое число, то медиана оставшихся чисел станет 38. Найдите медиану всего набора.

6. (7—11 классы, 1 балл). Лиза решила вышить себе на футболке узор: шесть точек по кругу, причём каждые две точки соединены отрезком. Каждую точку Лиза вышивает за 1 минуту, а каждый отрезок — ровно за 3 минуты. Сколько минут потребуется Лизе, чтобы вышить весь узор (если она ничего не пропустит и нигде не запутается)?



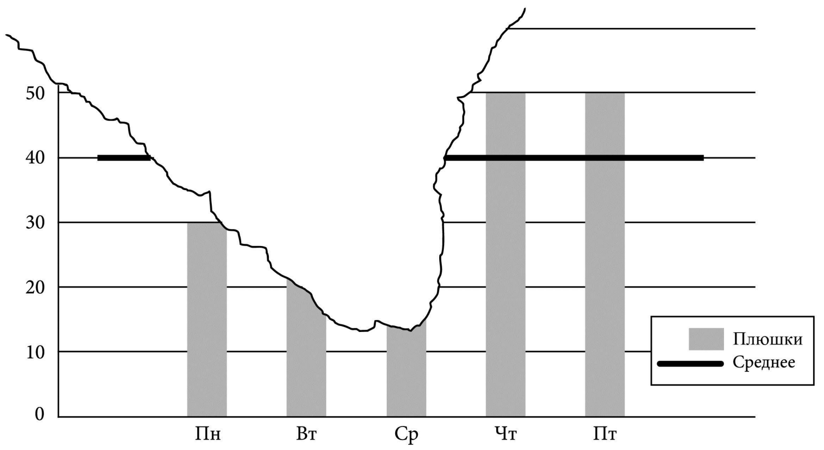
7. (8—11 классы, 2 балла). Рассеянный Учёный сконструировал фонарик с двумя разноцветными лампочками, соединив их последовательно (см. схему). Если одна из лампочек перегорает, то фонарик перестаёт работать. Математическое ожидание срока службы синей лампочки 2 года, математическое ожидание срока службы красной лампочки 3 года. Зная распределения сроков службы лампочек, Учёный вычислил, что математическое ожидание срока работы фонарика равно 2 года и 3 месяца. Не ошибся ли Рассеянный Учёный в своих расчётах?

8. (8—11 классы, 3 балла). Неправдоподобная легенда гласит, что однажды король Франции приказал отчеканить две памятные монеты в честь великого математика Даламбера. Король захотел, чтобы при бросании этих двух монет события «Два орла», «Две решки» и «Один орёл и одна решка» оказались равновероятными, пусть даже монеты будут разной формы. Сможет ли французский монетный двор выпустить такие монеты?

9. (9—11 классы, 3 балла). Джон Сильвер и Билли Бонс играют в кости. У них есть одна игральная кость, и они бросают её по очереди до тех пор, пока у кого-нибудь не выпадет шестёрка. У кого выпала, тот и выиграл. Начинает Дж. Сильвер. Найдите вероятность того, что выиграет Б. Бонс.

Вариант 2

1. (6—11 классы, 1 балл). На диаграмме показано, сколько плюшек Карлсон съедал во все рабочие дни недели. Для наглядности среднее число съеденных плюшек отмечено горизонтальной линией. Но случилось так, что кусок диаграммы Карлсон тоже откусил и съел. Известно лишь, что во вторник было съедено ровно 20 % плюшек, съеденных за все пять дней. Сколько плюшек Карлсон съел в среду?



2. (6—11 классы, 1 балл). Муми-тролль утверждает, что в среднем два осенних дня из трёх недостаточно солнечные, чтобы он чувствовал себя совершенно счастливым. Хемуль утверждает, что в среднем три осенних дня из четырёх недостаточно дождливые, чтобы он чувствовал себя совершенно счастливым. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный осенний день хотя бы один из них будет совершенно счастлив.

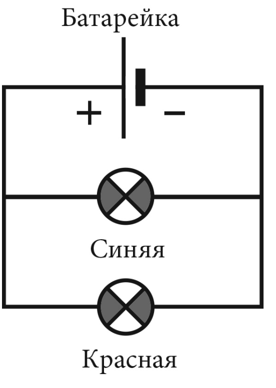
3. (6—11 классы, 2 балла). Есть три карточки. Обе стороны первой карточки жёлтые. Обе стороны второй карточки зелёные, а стороны третьей карточки разных цветов: одна жёлтая, а другая зелёная. Выбирают случайную карточку и поворачивают её случайной стороной вверх. Эта сторона оказалась жёлтой. Какова вероятность того, что другая сторона зелёная?

4. (7—11 классы, 1 балл). Лёня и Коля одновременно бросают по одной игральной кости. Выигрывает тот, у кого выпало больше очков. Если выпало поровну, наступает ничья. Какова вероятность того, что Лёня не выиграет?

5. (7—11 классы, 1 балл). В числовом наборе 200 чисел. Если выкинуть одно число, то медиана оставшихся чисел станет 43. Если выкинуть другое число, то медиана оставшихся чисел станет 27. Найдите медиану всего набора.

6. (7—11 классы, 1 балл). Катя решила вышить себе на свитере узор: пять точек по кругу, причём каждые две точки соединены отрезком. Каждую точку Катя вышивает за 1 минуту, а каждый отрезок — ровно за 4 минуты. Сколько минут потребуется Кате, чтобы вышить весь узор (если она ничего не пропустит и нигде не запутается)?

7. (8—11 классы, 2 балла). Рассеянный Учёный сконструировал фонарик с двумя разноцветными лампочками, соединив их параллельно (см. схему). Фонарик перестанет работать, только если перегорят обе лампочки. Математическое ожидание срока службы синей лампочки 3 года, математическое ожидание срока службы красной лампочки 4 года. Зная распределения сроков службы лампочек, Учёный вычислил, что математическое ожидание срока работы фонарика равно 3 года и 7 месяцев. Не ошибся ли Рассеянный Учёный в своих расчётах?



8. (8—11 классы, 3 балла). Неправдоподобная легенда гласит, что однажды король Франции приказал отчеканить две памятные монеты в честь великого математика Даламбера. Король захотел, чтобы при бросании этих двух монет события «Два орла», «Две решки» и «Один орёл и одна решка» оказались равновероятными, пусть даже монеты будут разной формы. Сможет ли французский монетный двор выпустить такие монеты?

9. (9—11 классы, 3 балла). Два ковбоя, Сэм и Билли, стреляют из револьвера в мишень по очереди до тех пор, пока кто-нибудь из них не попадёт. Ковбои стреляют одинаково хорошо: вероятность попасть при одном выстреле у каждого равна $\frac{2}{5}$. Начинает Сэм. Найдите вероятность того, что попадёт в мишень именно он.

2015 год

Вариант 1

1. *Отбор матросов* (6—11 классы, 1 балл). Служить на подводной лодке может матрос, рост которого не превышает 168 см. Все матросы из четырёх команд хотят служить на подводной лодке. Остался отбор по росту.

В команде 1 средний рост матросов равен 166 см.

В команде 2 медиана роста матросов равна 167 см.

В команде 3 самый высокий матрос имеет рост 169 см.

В команде 4 матросов ростом 167 см больше, чем матросов любого другого роста (то есть мода роста равна 167 см).

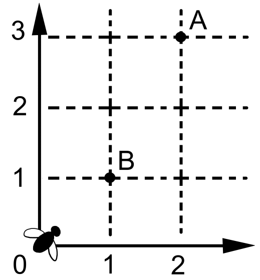
Укажите номер команды, где по крайней мере половина матросов может служить на подводной лодке?

2. *Ожидание автобуса* (6—11 классы, 1 балл). Аня на остановке ждёт автобуса. Какое из перечисленных событий имеет наибольшую вероятность:

1) $A = \{\text{Аня ждёт автобуса не меньше минуты}\}$;
2) $B = \{\text{Аня ждёт автобуса не меньше двух минут}\}$;
3) $C = \{\text{Аня ждёт автобуса не меньше пяти минут}\}$;
4) $D = \left\{\begin{matrix}\text{Аня ждёт автобуса не меньше двух,} \\ \text{но не больше пяти минут}\end{matrix}\right\}$?

3. *Три ковбоя* (6—11 классы, 2 балла). Три усталых ковбоя зашли в салун и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они не смогли отличить одну шляпу от другой и поэтому разобрали шляпы наугад. Найдите вероятность того, что никому не досталась его собственная шляпа. При необходимости результат округлите до сотых.

4. *Муха* (6—11 классы, 2 балла). Муха выползает из начала координат (см. рисунок) и движется вдоль линий целочисленной сетки либо вправо, либо вверх. В каждом узле сетки муха чисто случайно принимает решение — куда ей ползти дальше: вправо или вверх. Известно, что в какой-то момент муха попала в точку A. Найдите вероятность того, что по дороге муха побывала в точке B.



5. *Две монеты* (6—11 классы, 2 балла). Имеется две монеты. Можно ли написать на каждой стороне каждой монеты по одному числу так, чтобы сумма выпавших чисел при бросании этих монет принимала значения 1, 2, 3 и 4 с равными вероятностями 0,25?

6. *Конфеты* (7—11 классы, 2 балла). Одна коробка с конфетами большая, другая поменьше. В этих коробках лежат шоколадные конфеты и карамельки, неотличимые на ощупь. Петя предлагает Васе разыграть большую коробку. Вася должен, не глядя, выбрать из каждой коробки по конфете. Если обе конфеты окажутся шоколадными, то Вася выиграл. В противном случае выиграл Петя. Известно, что вероятность того, что Васе достанутся две карамельки, равна 0,5. Может ли быть, что вероятности выигрыша Васи и Пети одинаковы? Объясните ответ.

7. *Города и горожане* (7—11 классы, 3 балла). Город считается миллионером, если в нём более миллиона жителей. Вероятность какого события больше:

$$A = \{\text{наугад выбранный горожанин живёт в городе-миллионере}\}$$

или

$$B = \{\text{наугад выбранный город — миллионер}\}?$$

8. *Избиратели* (8—11 классы, 3 балла). 40 % приверженцев некоторой политической партии — женщины. 70 % приверженцев этой партии — городские жители. При этом 60 % горожан, поддерживающих партию, — мужчины. Являются ли независимыми события «приверженец партии — горожанин» и «приверженец партии — женщина»?

9. *Гроссмейстер* (9—11 классы, 3 балла). Каждый год в день города чемпион города по шахматам даёт сеанс одновременной игры на трёх досках трём лучшим игрокам детской шахматной секции. Известно, что в 60 % случаев чемпион выигрывает не больше двух партий из трёх, в 10 % случаев — проигрывает не менее двух. И даже бывает так (только 2 % случаев), что чемпион проигрывает все три партии. Найдите математическое ожидание числа выигранных чемпионом партий.

Вариант 2

1. *Отбор баскетболистов* (6—11 классы, 1 балл). В сборную по баскетболу отбирают претендентов из четырёх команд. Один из критериев отбора — рост спортсмена не менее 198 см.

В команде 1 средний рост спортсменов равен 199 см.

В команде 2 медиана роста спортсменов равна 201 см.

В команде 3 самый низкий спортсмен имеет рост 196 см.

В команде 4 спортсменов ростом 199—202 см больше, чем спортсменов ростом 195—198 см.

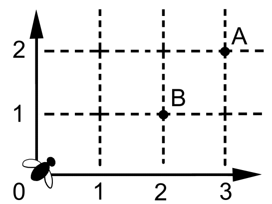
Укажите номер команды, откуда хотя бы половину спортсменов можно отобрать для сборной команды.

2. *Температура* (6—11 классы, 1 балл). Вася простудился. Мама измеряет ему температуру. Какое из перечисленных событий наиболее вероятное:

1) $A = \{$температура окажется выше 37,2°C$\}$;
2) $B = \{$температура окажется от 36,8°C до 37,8°C$\}$;
3) $C = \{$температура окажется выше 38,5°C$\}$;
4) $D = \{$температура окажется выше 36,3°C$\}$?

3. *Три ковбоя* (6—11 классы, 2 балла). Три усталых ковбоя зашли в салун и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они не смогли отличить одну шляпу от другой и поэтому разобрали шляпы наугад. Найдите вероятность того, что хотя бы кому-нибудь из ковбоев досталась его же собственная шляпа. При необходимости результат округлите до сотых.

4. *Муха* (6—11 классы, 2 балла). Муха выползает из начала координат (см. рисунок) и движется вдоль линий целочисленной сетки либо вправо, либо вверх. В каждом узле сетки муха чисто случайно принимает решение — куда ей ползти дальше: вправо или вверх. Известно, что в какой-то момент муха попала в точку A. Найдите вероятность того, что по дороге муха не прошла через B.



5. *Две монеты* (6—11 классы, 2 балла). Имеется две монеты. Можно ли написать на каждой стороне каждой монеты по одному числу так, чтобы сумма выпавших чисел при бросании этих монет принимала значения 1, 3, 5 и 7 с равными вероятностями 0,25?

6. *Конфеты* (7—11 классы, 2 балла). В двух коробках лежат карамельки и шоколадные конфеты, неотличимые на ощупь. В одной коробке 25 конфет, а в другой — 15 конфет. Петя предлагает Васе разыграть большую коробку. Вася должен, не глядя, выбрать из каждой коробки по конфете. Если обе конфеты окажутся шоколадными, то Вася выиграл. В противном случае выиграл Петя. Известно, что вероятность того, что Васе достанутся одна карамелька и одна шоколадка, равна 0,5. Может ли быть, что вероятности выигрыша Васи и Пети одинаковы? Объясните ответ.

7. *Города и горожане* (7—11 классы, 3 балла). Город считается небольшим, если в нём проживает менее 100 000 жителей. Вероятность какого события больше:

$$A = \{\text{наугад выбранный горожанин живёт в небольшом городе}\}$$

или

$$B = \{\text{наугад выбранный город небольшой}\}?$$

8. *Подписчики* (8—11 классы, 3 балла). 70 % подписчиков некоторого журнала — школьники. 80 % подписчиков живут в городе. При этом 30 % горожан, подписавшихся на этот журнал, не учатся в школе. Выберем случайного подписчика. Являются ли независимыми события «выбранный подписчик живёт в городе» и «выбранный подписчик учится в школе»?

9. *Срок службы фена* (9—11 классы, 3 балла). Известно, что 10 % фенов для сушки волос ломаются меньше чем через год после покупки. До двух лет служат 60 % фенов. И ни один фен не доживает до своего третьего дня рождения. Найдите математическое ожидание числа полных лет службы фена.

Ответы и решения

2017 год

Вариант 2

Задания 1—6 считаются выполненными, если дан верный ответ.

1. 15 %. **2.** 3340 г. Ответ может быть дан в любых единицах; например, 3,34 кг. **3.** 7. **4.** 3. **5.** *A*. **6.** 0,5.

7. Решение. Чтобы средний балл в обеих группах вырос, надо переводить из группы А в группу Б тех учеников, у которых балл выше среднего в группе Б, но ниже среднего в группе А. Таких двое: Лопатин и Филин.

Если перевести только Филина, то в группе Б средний балл станет

$$\frac{41{,}8\cdot 10+44}{11}=42<42{,}2.$$

Если перевести только Лопатина, то в группе А средний балл станет

$$\frac{47{,}2\cdot 10-47}{9}=47\frac{2}{9}<47{,}5.$$

Если же перевести обоих, то в группе А средний балл станет

$$\frac{47{,}2\cdot 10-47-44}{8}=47\frac{5}{8}>47{,}5,$$

а в группе Б получится

$$\frac{41{,}8\cdot 10+44+47}{12}=42\frac{5}{12}>42{,}2.$$

Ответ. Надо перевести Лопатина и Филина из группы А в группу Б[1].

8. Доказательство. **Способ 1.** Введём три случайные величины I_1, I_2 и I_3: пусть $I_k=1$, если автомат номер k сломался, и $I_k=0$, если не сломался. Легко найти математические ожидания:

$$\mathrm{E}I_1=0{,}3,\quad \mathrm{E}I_2=0{,}2,\quad \mathrm{E}I_3=p,$$

где p — вероятность поломки третьего автомата. Тогда число сломавшихся за день автоматов равно $X=I_1+I_2+I_3$, поэтому

$$\mathrm{E}X=0{,}3+0{,}2+p=0{,}5+p.$$

Если верить Петрову, то $0{,}5+p=\frac{3{,}3}{7}$, откуда $p=\frac{33}{70}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{35}<0$, что невозможно. Противоречие. Петров преуменьшает.

[1] Возможно, это не единственное решение. Может быть, в группе А найдутся другие ученики, у которых средний балл ниже 47,2, но выше 41,8

Способ 2. Пусть p — вероятность того, что первые два автомата сломались одновременно. Тогда математическое ожидание числа поломок этих двух автоматов равно

$$1 \cdot (0{,}3 - p + 0{,}2 - p) + 2 \cdot p = 0{,}5.$$

Значит, число поломок всех трёх автоматов в день не меньше $0{,}5 + 0 = 0{,}5$. А за неделю: $0{,}5 \cdot 7 = 3{,}5 > 3{,}3$. Петров преуменьшает.

9. Решение. Введем обозначения событий:

$$A = \{\text{В первой корзине есть идея}\},$$
$$B = \{\text{Во второй корзине есть идея}\}.$$

Требуется найти вероятность события $A \cap B$:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B).$$

Вероятность того, что при одном броске Учёный не попадёт в одну определённую корзину, равна $1 - p$. Значит, он не попадёт в неё шесть раз с вероятностью $(1-p)^6$. Поэтому $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1 - (1-p)^6$. Попасть сразу в две корзины невозможно, поэтому вероятность того, что Учёный попал хотя бы в одну корзину, равна $2p$. Тогда вероятность не попасть одним броском ни в одну из корзин равна $1 - 2p$, а вероятность не попасть ни разу из шести равна $(1-2p)^6$. Следовательно, $\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - (1-2p)^6$.

Получаем:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 2 - 2(1-p)^6 - 1 + (1-2p)^6 = 1 - 2(1-p)^6 + (1-2p)^6.$$

Ответ. $1 - 2(1-p)^6 + (1-2p)^6$.

2016 год

Вариант 1

1. 60. **2.** $\frac{11}{20}$ (или 0,55). **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $\frac{5}{12}$. **5.** 45 (или любое другое число от 38 до 52 включительно). **6.** 51.

7. Решение. Пусть случайные величины ξ и η — сроки службы синей и красной лампочек соответственно. Срок службы фонарика равен наименьшей из этих величин. Ясно, что $\min(\xi, \eta) \leqslant \xi$. Перейдём к математическим ожиданиям: $\mathrm{E}\min(\xi, \eta) \leqslant \mathrm{E}\xi = 2$. Значит, математическое ожидание срока работы фонарика не больше 2 лет.

Ответ. Ошибся.

8. Решение. Покажем от противного, что сделать такие монеты невозможно. Предположим, что чеканщикам это удалось. Пусть вероятность выпадения орла на первой монете равна p_1, а на второй — p_2. Тогда получаем

$$(1-p_1)(1-p_2) = p_1p_2 = p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1).$$

Из первого равенства следует, что $1-p_1-p_2+p_1p_2=p_1p_2$, откуда $p_1+p_2=1$.

Тогда из второго равенства следует, что $p_1p_2=p_1^2+p_2^2$. Таким образом, $p_1^2-2p_1p_2+p_2^2=-p_1p_2$; $(p_1-p_2)^2=-p_1p_2$. Число в левой части равенства неотрицательное, а в правой — отрицательное.

Ответ. Не сможет.

9. Решение. **Способ 1.** Чётные броски принадлежат Б. Бонсу. Значит, Бонс выигрывает только тогда, когда общее число бросков, включая последний удачный, будет чётно. Вероятность выпадения шестёрки равна $\frac{1}{6}$. Вероятность противоположного события $\frac{5}{6}$. Значит, вероятность того, что всего будет сделано чётное число бросков, равна

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots=$$
$$=\frac{5}{36}\left(1+\frac{25}{36}+\left(\frac{25}{36}\right)^2+\ldots\right)=\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}}=\frac{5}{11}.$$

Способ 2. Обозначим через p искомую вероятность события «выиграл Б. Бонс». Это событие может получиться одним из двух способов.

1. В начале Дж. Сильвер выбросил не 6, а Б. Бонс тут же выбросил 6. Вероятность этого $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.

2. В первый раз и Сильвер, и Бонс оба выбросили не 6. После этого игра как бы начинается заново, и Б. Бонс побеждает в ней с вероятностью p. Вероятность такого развития событий $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot p=\frac{25}{36}p$.

Таким образом, $p=\frac{5}{36}+\frac{25}{36}p$, откуда $p=\frac{5}{11}$.

Ответ. $\frac{5}{11}$.

2015 год

Вариант 1

1. Решение. Пример команды 1: три матроса с ростом 160, 169 и 169 см. Средний рост 166 см, но двое из трёх не годны к службе на подводной лодке. Значит, в команде 1 не обязательно половина матросов пригодна.

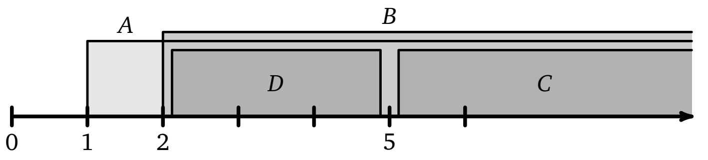
Пример команды 3: два матроса с ростом 169 см. Служить на лодке не может ни один.

Пример команды 4: пять матросов с ростом 167, 167, 169, 170 и 171 см. Мода равна 167, но трое из пяти не могут служить на лодке.

Рассмотрим команду 2. По определению медианы не меньше половины матросов имеют рост не больше чем 167 см, и, может быть, есть ещё матросы ростом 168 см. Значит, в команде 2 заведомо не менее половины матросов могут служить на подлодке.

Ответ. 2.

2. Решение. Расположим события на временно́й оси.



Событие A включает в себя и событие B, и событие C, и событие D, то есть событие A наиболее обширное: $C \subset B \subset A$ и $D \subset B \subset A$.

Следовательно, $\mathrm{P}(C) \leqslant \mathrm{P}(B) \leqslant \mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(D) \leqslant \mathrm{P}(B) \leqslant \mathrm{P}(A)$.

Ответ. 1.

3. Решение. У ковбоев 6 равновозможных способов разобрать шляпы.

Своя шляпа			
Вариант 1	✓	✓	✓
Вариант 2	✓		
Вариант 3			✓
Вариант 4	✓		
Вариант 5			
Вариант 6			