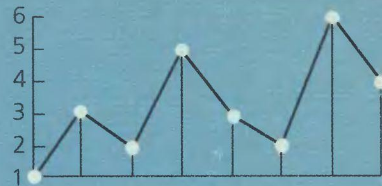
ТЕМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА

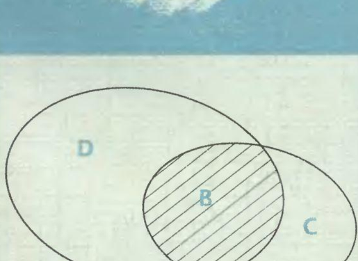
Математика



Е. А. Бунимович, В. А. Булычев

Вероятность и статистика

5–9 классы



УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

дрофа

ТЕМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Математика

Е. А. Бунимович, В. А. Булычев

Вероятность и статистика

Пособие для общеобразовательных учебных заведений

5–9 классы

Допущено Министерством образования Российской Федерации

ДРОФА

МОСКВА · 2002

УДК 519.2(075)
ББК 22.17я7
Б91

Серия основана в 2001 году

Бунимович Е. А., Булычев В. А.
Б91 Вероятность и статистика. 5—9 кл.: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. — М.: Дрофа, 2002. — 160 с.: ил. — (Темы школьного курса).
ISBN 5—7107—4582—0

Пособие содержит необходимый теоретический и практический материал для изучения вероятностно-статистической линии, становящейся сегодня неотъемлемой частью школьного курса математики. Изучение вероятности предполагается в рамках базового курса математики 5—9 классов. Для успешного усвоения достаточно овладения базовым теоретическим материалом и решения задач группы А.

Пособие может быть использовано вместе с любым из действующих учебников по математике.

УДК 519.2(075)
ББК 22.17я7

Учебное издание

Серия «Темы школьного курса»

Бунимович Евгений Абрамович
Булычев Владимир Александрович

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА
5—9 классы

Пособие для общеобразовательных учебных заведений

Зав. редакцией *М. Г. Циновская*. Редактор *Л. О. Рослова*
Оформление *Л. Б. Андрачникова*. Художественный редактор *М. Г. Мицкевич*. Технический редактор *Н. А. Торгашова*
Компьютерная верстка *Н. И. Салюк*. Корректор *Г. И. Мосякина*

Изд. лиц. № 061622 от 07.10.97.
Подписано к печати 10.08.01. Формат 84×108 1/32.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,4. Тираж 10 000 экз. Заказ № 2600.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А. Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов издательства.
АООТ «Тверской полиграфический комбинат» 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.

ISBN 5—7107—4582—0

От авторов

На рубеже третьего тысячелетия становится очевидной универсальность вероятностно-статистических законов, они стали основой описания научной картины мира. Современная физика, химия, биология, демография, социология, лингвистика, философия, весь комплекс социально-экономических наук развиваются на вероятностно-статистической базе.

В нашу жизнь властно вошли выборы и референдумы, банковские кредиты и страховые полисы, таблицы занятости и диаграммы социологических опросов, и даже сводки погоды в газетах сообщают о том, что «завтра ожидается дождь с вероятностью 40%», оставляя нас в полной растерянности: брать ли зонтик?

И ребенок в своей жизни ежедневно сталкивается с вероятностными ситуациями, ведь игра и азарт составляют существенную часть его жизни. Круг вопросов, связанных с осознанием соотношения понятий вероятности и достоверности, проблемой выбора наилучшего из нескольких вариантов решения, оценкой степени риска и шансов на успех, представлением о справедливости и несправедливости в играх и в реальных жизненных коллизиях — все это, несомненно, находится в сфере реальных интересов становления и развития личности.

Подготовку человека к таким проблемам во всем мире осуществляет школьный курс математики. Принципиальные решения о включении вероятностно-статистического материала как равноправной составляющей обязательного школьного математического образования приняты ныне и в нашей стране. Все перспективные государственные образовательные документы последних лет содержат вероятностно-статистическую линию в курсе математики 5—9 классов наравне с такими привычными линиями, как «Числа», «Функции», «Уравнения и неравенства», «Геометрические фигуры». Продолжение изучения этой линии предполагается в старших классах.

Уже несколько лет в различных регионах России учащиеся основной школы работают по новым учебным комплектам

«Математика 5—6» под ред. Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина, «Математика 7—9» под ред. Г. В. Дорофеева. Это первые российские учебники, в которых последовательно с 5 по 9 класс проводится вероятностно-статистическая линия, органично связанная с другими темами курса. В этих учебных комплектах принят статистический подход к понятию вероятности, который методически и психологически соответствует возрастным особенностям учеников основной школы. Накопленный опыт преподавания свидетельствует о безусловной доступности этого материала, очевидном интересе, который он вызывает у учащихся, позитивном влиянии на развитие мышления школьника.

Цель данного пособия — помочь ребенку в формировании вероятностного мышления, в освоении школьного курса «Вероятность и статистика», помочь учителю в постановке преподавания этого нового материала.

Основное содержание пособия предполагает его изучение в курсе математики 5—9 классов, при этом принятая система изложения близка к той, которая использована в указанных выше учебниках.

В книге содержится также дополнительный теоретический материал и соответствующие ему блоки задач, которые могут оказаться полезными для проведения занятий в профильных классах, математических кружках, на факультативах. Опыт показывает, что отдельные главы пособия могут быть успешно использованы при изучении вероятностно-статистического материала и в 10—11 классах.

В учебном пособии 12 параграфов. В каждом параграфе после теоретического материала и примеров даются две группы задач:

«А» — типовые задачи, необходимые для усвоения основных теоретических положений курса;

«Б» — задачи более сложные, в которых развиваются идеи и методы теоретической части параграфа. Исследовательские и особенно сложные задачи отмечены звездочкой «*». Два параграфа, необязательные для изучения, также отмечены звездочкой.

Заметим, что для нормального усвоения курса «Вероятность и статистика» достаточно владения базовым теоретическим материалом и решения задач группы «А».

При изучении § 9 «Случайные числа и компьютер» желательно использование компьютера. Необходимые для этого программы приведены в тексте параграфа и решениях к нему. Однако практически все задачи могут решаться и без компьютера, с использованием приведенной в конце пособия «Таблицы случайных чисел».

Учитывая новизну курса «Вероятность и статистика» для российской средней школы, ко всем задачам учебного пособия даны ответы, а к большинству задач — подробные указания, комментарии и решения.

Что изучает теория вероятностей

Математику многие любят за ее вечные истины: дважды два всегда четыре, сумма четных чисел четна, а площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон. В любой задаче, которую вы решали на уроках математики, у всех получался один и тот же ответ — нужно было только не делать ошибок в решении.

Реальная жизнь не так проста и однозначна. Исходы многих явлений заранее предсказать невозможно, какой бы полной информацией о них мы ни располагали. Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадет подброшенная вверх монета, когда в следующем году выпадет первый снег или сколько человек в городе захотят в течение ближайшего часа позвонить по телефону. Такие непредсказуемые явления называются *случайными*.

Однако случай тоже имеет свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении случайных явлений. Если подбросить монету 1000 раз, то «орел» выпадет приблизительно в половине случаев, чего никак нельзя сказать о двух или даже десяти бросаниях. Обратите внимание на слово «приблизительно» — закон не утверждает, что число «орлов» будет в точности 500 или окажется в промежутке от 490 до 510. Он вообще ничего не утверждает наверняка, но дает определенную степень уверенности в том, что некоторое случайное событие произойдет. Такие закономерности изучает специальный раздел математики — *Теория вероятностей*. С ее помощью можно с большой степенью уверенности (но все равно не наверняка!) предсказать и дату выпадения первого снега, и количество телефонных звонков.

Теория вероятностей неразрывно связана с нашей повседневной жизнью. Это дает нам с вами замечательную возможность установить многие вероятностные законы опытным путем, многократно повторяя случайные эксперименты. Материалами для этих экспериментов чаще всего будут обыкновенная монета, игральный кубик, набор домино, рулетка и даже колода карт. Каждый из этих предметов так или иначе связан с играми. Дело в том, что случай здесь предстает в наиболее чистом виде, и первые вероятностные задачи были связаны с оценкой шансов игроков на выигрыш.

Современная теория вероятностей ушла от азартных игр так же далеко, как геометрия от задач землеустройства, но их реквизит по-прежнему остается наиболее простым и надежным источником случая. Поупражнявшись с рулеткой и кубиком, вы научитесь вычислять вероятность случайных событий в реальных жизненных ситуациях, что позволит вам оценивать свои шансы на успех, проверять гипотезы, принимать оптимальные решения не только в играх и лотереях.

Решая вероятностные задачи, будьте очень внимательны, старайтесь обосновывать каждый свой шаг, ибо никакая другая область математики не содержит такое количество парадоксов, как теория вероятностей. И пожалуй, главное объяснение этому — ее связь с реальным миром, в котором мы живем.

1 Случайные события

Оценивая возможность наступления какого-либо события, мы часто говорим: «Это очень возможно», «Это непременно произойдет», «Это маловероятно», «Это никогда не случится».

Купив лотерейный билет, мы можем выиграть, а можем и не выиграть; на очередных выборах правящая партия может победить, а может и не победить; завтра на уроке математики вас могут вызвать к доске, а могут и не вызвать.

Все это примеры **случайных событий**, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти.

Мы будем обозначать события заглавными латинскими буквами и заключать их описание в фигурные скобки, например:

A={в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье};

B={свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз};

C={при бросании кубика выпадет шестерка};

D={при бросании кубика выпадет четное число очков}.

Все перечисленные выше события *A*, *B*, *C*, *D* — случайные.

Есть и такие события, которые в данных условиях произойти не могут. Их называют **невозможными событиями**. Например:

E={в следующем году снег в Москве вообще не выпадет};

F={при бросании кубика выпадет семерка}.

Если же событие при данных условиях обязательно произойдет, то его называют **достоверным.** Например:

G={в следующем году в Москве выпадет снег};
H={при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7}.

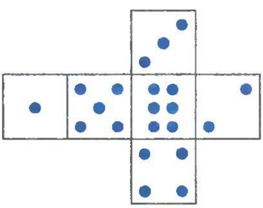
К достоверным можно отнести и событие *B*, правда, достоверность его оказывается под вопросом в невесомости, но там обычно не едят бутербродов с маслом.

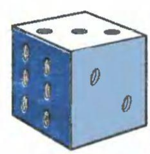
Невозможные и достоверные события встречаются в жизни сравнительно редко. Поэтому можно сказать, что живем мы в мире случайных событий[1].

Чтобы доказать, что данное событие — случайное, нужно привести пример такой ситуации, или, как говорят математики, такого **исхода**, когда событие происходит, и пример такого исхода, когда оно не происходит.

Так, например, событие *D* — случайное, потому что оно происходит, когда на кубике выпадает четверка, и не происходит, когда на кубике выпадает пятерка.

При бросании кубика может выпасть от одного до шести очков (см. рис.), поэтому событие *F* — невозможное, а событие *H* — достоверное.





Пример 1. Бросаем два кубика. Какие из следующих ытий невозможные, какие — случайные, а какие — достоверные:

---

[1] В теории вероятностей принято все события называть случайными, а невозможные и достоверные рассматривать как их специальные разновидности.

A={на кубиках выпало одинаковое число очков};
B={сумма очков на кубиках не превосходит 12};
C={сумма очков на кубиках равна 11};
D={произведение очков на кубиках равно 11}?

Исход любого бросания можно описать двумя числами, выпавшими на кубиках. Например, (3, 1) означает, что на первом кубике выпало число 3, а на втором — число 1.

При исходе (1, 1) событие *A* происходит, а при исходе (1, 2) — не происходит. Значит, событие *A* случайное.

Событие *B* происходит при любом исходе: ведь каждое из двух чисел на кубиках не превосходит 6, а значит, их сумма не превосходит 12. Следовательно, событие *B* достоверное.

Событие *C* происходит при исходе (5, 6), но не происходит при исходе (2, 2). Значит, оно случайное.

Наконец, для события *D* нет исхода, при котором оно происходит: число 11 нельзя представить в виде произведения двух целых чисел от 1 до 6. Значит, это событие невозможное.

Пример 2. В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, а какие — достоверные:

A={все вынутые шары одного цвета};
B={все вынутые шары разных цветов};
C={среди вынутых шаров есть шары разных цветов};
D={среди вынутых есть шары всех трех цветов}?

Событие *A* — невозможное: нельзя вытащить из коробки четыре шара одного цвета, так как в ней только по три шара каждого цвета.

Событие *B* — тоже невозможное: шары в коробке трех цветов, а вынимаем мы четыре шара.

Событие *C* — достоверное: ведь все четыре шара, как мы уже выяснили, не могут быть одного цвета, поэтому среди них обязательно есть шары хотя бы двух цветов.

Наконец, событие D — случайное. Закодируем исходы опыта первыми буквами цветов, в которые окрашены вынутые шары. Например: КЖЖЗ означает, что вынули один красный, два желтых и один зеленый шар. КЖЖЗ — это пример исхода, при котором событие D происходит, а ККЖЖ — пример исхода, когда событие D не происходит.

1. Укажите, какие из следующих событий невозможные, какие — достоверные, какие — случайные:

A={футбольный матч «Спартак» — «Динамо» закончится вничью};

B={вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее};

C={в полночь выпадет снег, а через 24 часа будет светить солнце};

D={завтра будет контрольная по математике};

E={30 февраля будет дождь};

F={вас изберут президентом США};

G={вас изберут президентом России}.

2. Вы купили в магазине телевизор, на который фирма-производитель дает два года гарантии. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A={телевизор не сломается в течение года};

B={телевизор не сломается в течение двух лет};

C={в течение двух лет вам не придется платить за ремонт телевизора};

D={телевизор сломается на третий год}?

3. В коробке лежит 10 красных, 1 зеленая и 2 синие ручки. Из коробки наугад вынимают два предмета. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A={вынуты две красные ручки};

B={вынуты две зеленые ручки};

C={вынуты две синие ручки};
D={вынуты ручки двух разных цветов}.
E={вынуты две ручки};
F={вынуты два карандаша}?

4. Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали шляпы наугад. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A={каждый надел свою шляпу};
B={все надели чужие шляпы};
C={двое надели чужие шляпы, а один — свою};
D={двое надели свои шляпы, а один — чужую}?

5. В игре «Любовь с первого взгляда» участвуют трое юношей и три девушки. Каждый юноша выбирает одну из девушек, а каждая девушка — одного из юношей. Если юноша и девушка выбирают друг друга, то образуется пара. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A={не образовалось ни одной пары};
B={образовалась одна пара};
C={образовалось две пары};
D={образовалось три пары}?

6. Винни-Пух, Пятачок и все-все-все садятся за круглый стол праздновать день рождения. При каком количестве всех-всех-всех событие *A={Винни-Пух и Пятачок будут сидеть рядом}* является достоверным, а при каком — случайным?

7. В школе учится N учеников. При каких значениях N событие *A={в школе есть ученики с совпадающими днями рождения}* является случайным, а при каких — достоверным? Выясните, произошло ли это событие в вашей школе. А в вашем классе?

8. Среди 100 билетов школьной благотворительной лотереи 20 выигрышных. Сколько билетов вам надо купить, чтобы событие *A={вы ничего не выиграете}* было невозможным?

9. В шкафу 10 пар ботинок с 36-го по 45-й размер — по одной паре каждого размера. Ботинки достают из шкафа наугад. Какое наименьшее количество ботинок надо вынуть из шкафа, чтобы событие A = *{из вынутых ботинок можно составить хотя бы одну пару}* было достоверным?

10. В классе учится 10 мальчиков и 20 девочек. Какие из следующих событий являются для такого класса невозможными, какие — случайными, какие — достоверными:

A={в классе есть два человека, родившихся в разные месяцы};

B={в классе есть два человека, родившихся в одном месяце};

C={в классе есть два мальчика, родившихся в одном месяце};

D={в классе есть две девочки, родившиеся в одном месяце};

E={все мальчики родились в разные месяцы};

F={все девочки родились в разные месяцы};

G={есть мальчик и девочка, родившиеся в одном месяце};

H={есть мальчик и девочка, родившиеся в разные месяцы}?

Б

11. Автобусу, в котором едет 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A={все пассажиры выйдут из автобуса на разных остановках};

B={все пассажиры выйдут на одной остановке};

C={на каждой остановке хоть кто-то выйдет};

D={найдется остановка, на которой никто не выйдет};

E={на всех остановках выйдет четное число пассажиров};

F={на всех остановках выйдет нечетное число пассажиров}?

12. На координатной прямой в начале отсчета стоит фишка. После каждого бросания монеты она сдвигается на единицу вправо, если выпал «орел», или на единицу влево, если выпала «решка». Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A={после 4-х бросаний фишка находится в точке с координатой 0};

B={после 3-х бросаний фишка находится в точке с координатой 2};

C={после 5-ти бросаний фишка находится в точке с координатой 5};

D={после 50-ти бросаний фишка находится в точке с координатой 25};

E={после 50-ти бросаний фишка находится в точке с координатой 26}?

13. На тетрадный лист в линейку бросают зубочистку. Расстояние между линейками 1 см. При какой длине зубочистки событие *A={зубочистка пересекла 10 линий}* будет невозможным, при какой — случайным, при какой — достоверным?

14*. Около школы останавливаются автобусы трех маршрутов: № 1, № 2 и № 3. Интервал в движении автобусов каждого маршрута колеблется от 8 до 10 минут. Когда Саша, Маша, Гриша и Аня подошли к остановке, от нее отошел автобус № 3, а еще через 6 минут подошел автобус № 1. После этого каждый из ребят высказал свое мнение о том, автобус какого маршрута будет следующим:

Саша: Следующим обязательно будет № 2;
Маша: Возможно, что следующим будет № 2;
Гриша: Возможно, что следующим будет № 3;
Аня: Невозможно, что следующим будет № 1.

С кем из ребят вы согласны, а с кем нет? Объясните сделанный выбор.

15*. На дорогу от дома до школы Миша тратит от 10 до 15 минут, если идет пешком, и от 2 до 3 минут, если едет на троллейбусе. При каких интервалах движения троллейбусов событие *A={по пути в школу Мишу обгонит хотя бы один троллейбус}* будет невозможным, при каких — случайным, при каких — достоверным?

16. а) В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад N шаров. Рассмотрим событие A=*{среди вынутых шаров окажутся шары ровно трех цветов}*. Для каждого N от 1 до 9 определите, какое это событие — невозможное, достоверное или случайное, и заполните таблицу:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Событие A									

б) В коробке снова 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Рассмотрим событие B=*{среди вынутых шаров окажутся шары ровно M цветов}*. Для каждого M от 1 до 4 определите, какое это событие — невозможное, достоверное или случайное, и заполните таблицу:

M	1	2	3	4
Событие B				

в) Все в той же коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад N шаров. Рассмотрим событие *C={среди N вынутых шаров окажутся шары ровно M разных цветов}*. Для каждого N от 1 до 9 и каждого M от 1 до 4 определите, какое это событие — невозможное, достоверное или случайное, и заполните таблицу. Какую строку и какой столбец этой таблицы можно заполнить по результатам двух предыдущих задач?

M \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									

2 Что вероятнее?

Сравнение шансов

Итак, случайные события при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. При этом у одних случайных событий шансов произойти больше (значит, они более вероятные — ближе к достоверным), а у других меньше (они менее вероятные — ближе к невозможным).

Понятно, что более вероятные события будут происходить чаще, а менее вероятные — реже. Так что сравнивать вероятности можно и по частоте, с которой события происходят. Правда, для этого нужны статистические данные.

Попытаемся расположить на специальной **вероятностной шкале** события, приведенные в предыдущем параграфе:

A={в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье};

B={свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз};

C={при бросании кубика выпадет шестерка};

D={при бросании кубика выпадет четное число очков};

E={в следующем году снег в Москве вообще не выпадет};

F={при бросании кубика выпадет семерка};

G={в следующем году в Москве выпадет снег};

H={при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7}.

Пусть слева, в начальной точке шкалы, будут располагаться невозможные события, справа, в конечной точке, — достоверные, а между ними — случайные.

При этом чем больше у случайного события шансов произойти, тем оно более вероятно и тем правее его следует расположить на вероятностной шкале; чем меньше шансов — тем левее. Если два события, на наш взгляд, имеют равные шансы, будем располагать их в одном и том же месте шкалы друг над другом.

Покажем, что перечисленные выше события располагаются на вероятностной шкале так, как изображено на рисунке 1.

Рис. 1

Проще всего расположить на шкале невозможные и достоверные события. Как уже говорилось, события *E={в следующем году снег в Москве вообще не выпадет}* и *F={при бросании кубика выпадет семерка}* — невозможные. У них нет никаких шансов произойти, поэтому они расположены в левом конце шкалы. Достоверные события *G={в следующем году в Москве выпадет снег}* и *H={при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7}* обязательно произойдут, поэтому они расположены в правом конце шкалы.

А как располагать на шкале случайные события? Начнем с события *D={при бросании кубика выпадет четное число очков}*. Когда мы бросаем кубик, каждая из шести граней имеет равные шансы оказаться верхней. Четное число очков — на трех гранях кубика, на трех других — нечетное. Значит, ровно половина шансов (три из шести) за то, что событие *D* произойдет, и ровно половина (три из шести) за то, что оно не произойдет. Поэтому мы расположили событие *D* в середине шкалы.

У события *C={при бросании кубика выпадет шестерка}* только один шанс из шести, а у события *D* — три шанса из шести. Поэтому *C* менее вероятно и расположено на шкале левее события *D*.

Событие *A={в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье}* еще менее вероятно, чем *C*, — ведь в неделе 7 дней и в любой из них с равной вероятностью может выпасть первый снег, поэтому у события A один шанс из семи.

Труднее всего расположить на шкале событие B=*{свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз}*. Здесь нельзя точно подсчитать шансы, но можно призвать на помощь жизненный опыт: бутерброд гораздо чаще падает на пол именно маслом вниз (есть даже «закон бутерброда»), поэтому событие B гораздо вероятнее, чем D.

Построенная вероятностная шкала не совсем настоящая — на ней нет числовых меток, делений. Ведь вы еще не умеете измерять вероятности случайных событий числами, как это происходит с длинами отрезков или величинами углов. Совсем скоро вы узнаете, как *вычислять* вероятность, — пока же потренируйтесь в сравнении шансов и в расположении событий на вероятностной шкале.

Пример 1. Вова хочет вытянуть наугад одну карту из колоды с 36-ю картами. Маша, Саша, Гриша и Наташа предсказали следующее:

Маша: Это будет король.
Саша: Это будет пиковая дама.
Гриша: Эта карта будет красной масти.
Наташа: Эта карта будет пиковой масти.
Как сравнить между собой шансы предсказателей?

Обозначим все события, предсказанные ребятами, буквами:

A=*{Вова достанет короля}*;
B=*{Вова достанет пиковую даму}*;
C=*{Вова достанет карту красной масти}*;
D=*{Вова достанет карту пиковой масти}*.

Подсчитаем теперь, сколько шансов за осуществление каждого из этих событий, или, другими словами, сколько в колоде соответствующих карт. Всего в колоде: королей — 4; пиковая дама — 1; карт красных мастей — 18; пик — 9.

Чем больше шансов, тем вероятнее будет соответствующее случайное событие. Их расположение на вероятностной шкале показано на рисунке 2. Понятно, что шансы предсказателей будут соотноситься между собой так же, как шансы рассмотренных событий.

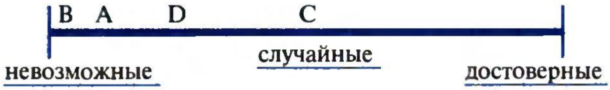


Рис. 2

Пример 2. Что вероятнее: *A={получить шестерку при подбрасывании кубика}* или *B={вытянуть шестерку из перетасованной колоды карт}*?

Как и в предыдущем примере, подсчитаем шансы за осуществление каждого из этих событий. На кубике одна шестерка; в колоде четыре шестерки. Стало быть, событие *B* более вероятно? Нет, конечно! Просто мы неверно считали шансы. Ведь когда речь идет о шансах, то говорят не просто *«два шанса»* или *«один шанс»*, а *«два шанса из трех»* или *«один шанс из тысячи»*.

В примере 1 это не могло привести к ошибке, поскольку там все шансы были *«из 36»*. А вот в этом примере ситуация сложнее:

шестерок на кубике — 1, а всего граней у куба — 6;
шестерок в колоде — 4, а всего карт в колоде — 36.

Ясно, что *«1 шанс из 6»* лучше, чем *«4 шанса из 36»*, ведь $\frac{1}{6} > \frac{4}{36}$.

Таким образом, *шансы имеет смысл сравнивать как дроби: в числителе — сколько шансов за осуществление данного события, а в знаменателе — сколько всего возможно исходов.* Понятно, что если знаменатели одинаковые, то можно сравнивать только числители (что и было сделано в примере 1).

Пример 3. Попробуем на основе нашего опыта общения по телефону сравнить между собой степень вероятности следующих событий:

A={вам никто не позвонит с 5 до 6 утра};
B={вам кто-нибудь позвонит с 5 до 6 утра};
C={вам кто-нибудь позвонит с 18 до 21};
D={вам никто не позвонит с 18 до 21}.

Ранним утром звонки бывают очень редко, поэтому событие *A* — очень вероятное, почти достоверное, а *B* — маловероятное, почти невозможное.

Вечерние часы, наоборот, время самого активного телефонного общения, поэтому событие *C* для большинства людей вероятные, чем *D*. Хотя, если вам вообще звонят редко, *D* может оказаться вероятнее *C*.

17. В коробке лежит 10 красных, 1 зеленая и 2 синие ручки. Из нее наугад вынимается один предмет. Определите, какие из событий более вероятные, какие — менее вероятные. Расположите их на вероятностной шкале:

A={будет вынута красная ручка};
B={будет вынута зеленая ручка};
C={будет вынута синяя ручка};
D={будет вынута ручка};
E={будет вынут карандаш}.

18. Антон учится в 6 «А» классе, Борис — в 6 «Б», Вадим — в 6 «В». От каждого класса по жребию выбирают одного делегата в школьный хор. Как вы думаете, у кого из друзей больше шансов петь в хоре, если в 6 «А» учится 25 человек, в 6 «Б» — 22 человека, а в 6 «В» — 28 человек?

19. Из коробки с синими и черными шарами наугад вынимают один шар. Сравните между собой шансы вынуть синий шар из коробок, изображенных на рисунке 3, и расположите на вероятностной шкале соответствующие им случайные события.

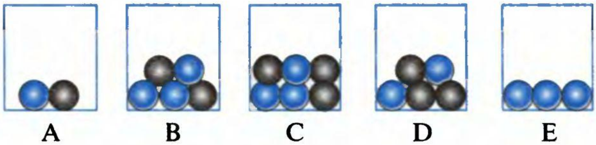


Рис. 3

20. Расположите на вероятностной шкале события:

A={1 января в Москве пойдет снег};
B={1 января в Москве пойдет дождь};
C={1 января в Москве будет северное сияние};
D={1 января над Москвой взойдет солнце}.

21. Когда Витя почувствовал себя нездоровым, мама, как обычно, поставила ему термометр. Расположите на вероятностной шкале следующие события:

A={Витина температура больше 36,6°};
B={Витина температура равна 36,6°};
C={Витина температура меньше 36,6°};
D={Витина температура больше 20°};
E={Витина температура меньше 100°}.

22. Придумайте примеры случайных событий *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, которые расположились бы на вероятностной шкале так, как на рисунке 4.

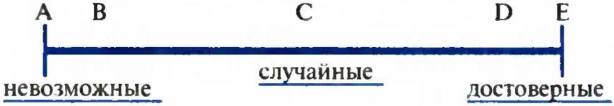


Рис. 4

23. Винни-Пух и Пятачок обычно решают, к кому идти в гости, с помощью вертушки, изображенной на рисунке 5. Если стрелка остановится на черном поле, то они идут к Винни-Пуху, если на белом — к Пятачку. К кому они ходят чаще? Во сколько раз?

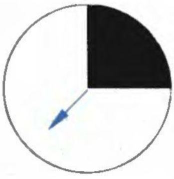


Рис. 5

24. Малыш наугад показывает пальцем точку на глобусе. Сравните между собой шансы событий:

A={он попадет в Россию};
B={он попадет в Тихий океан};
C={он попадет в Западное полушарие}.

25. Вы выигрываете, если стрелка вертушки останавливается на черном. Какая из вертушек, изображенных на рисунке 6, дает вам больше шансов на выигрыш?

а) *б)*

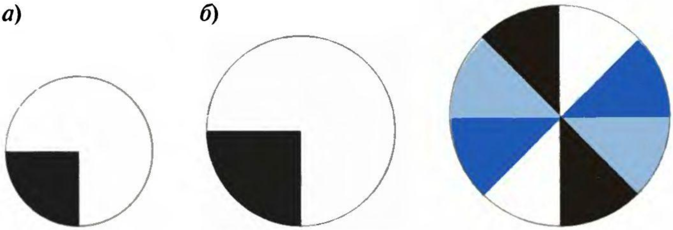


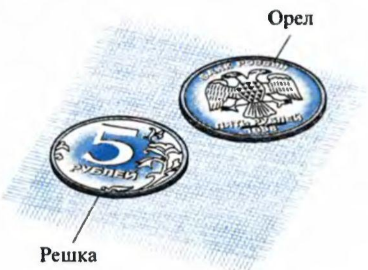
Рис. 6

26. Бросают кубик. Определите, какие из событий более вероятные, какие — менее вероятные, и расположите их на вероятностной шкале:

A={выпадет четное число};
B={выпадет нечетное число};
C={выпадет тройка};
D={выпадет шестерка};
E={выпадет число, больше 3};
F={выпадет число, меньше 10}.

27. Определите, какие из следующих событий более вероятные, какие — менее вероятные, и расположите их на вероятностной шкале:

A={при бросании монеты выпадет «орел»};
B={при бросании кубика выпадет тройка};
C={при бросании кубика выпадет шестерка};
D={из колоды карт вытянут карту красной масти};
E={из колоды карт вытянут туза};
F={из колоды карт вытянут пику};
G={из колоды карт вытянут красную пику}.



28. Саша купил в магазине пачку чая и решил взвесить ее на лабораторных весах (их точность — до 1 миллиграмма). На пачке написан вес — 200 г. Расположите на вероятностной шкале следующие события:

A={вес пачки больше 200 г};
B={вес пачки меньше 200 г};
C={вес пачки ровно 200 г};
D={вес пачки меньше 500 г};
E={вес пачки больше 100 г}.

29. Представьте, что вы купили карточку лотереи, в которой нужно правильно угадать 10 номеров из 20.

Расположите на вероятностной шкале события:

A={вы угадаете все 10 номеров};
B={вы не угадаете ни одного номера}.

30. Двое играют в вертушку: если стрелка остановится на черном секторе — выигрывает первый, если на белом — выигрывает второй. Если стрелка остановится на каком-то другом секторе, вертушку вращают еще раз. Назовите вертушку (рис. 7), для которой:

а) шансы игроков будут равными;
б) у первого больше шансов выиграть;
в) у второго больше шансов выиграть;
г) игра будет наиболее продолжительной.

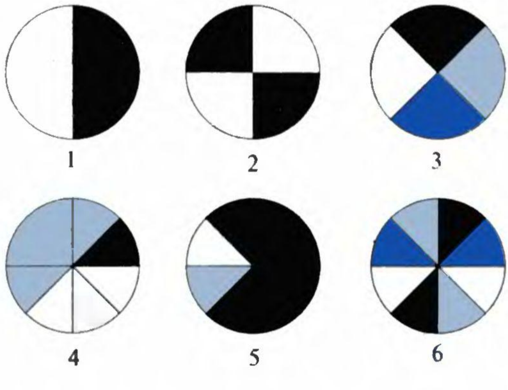


Рис. 7

31. У спичечного коробка шесть граней. Обозначим их буквами: *A*, *B* — грани с этикетками, *C*, *D* — грани, о которые чиркают спичкой, *E*, *F* — грани, где спички выдвигаются (на рисунке 8 можно увидеть три из шести граней). Сравните между собой шансы событий *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, где каждое из них означает, что подброшенный вверх пустой коробок упадет на соответствующую грань. Изобразите их на вероятностной шкале.

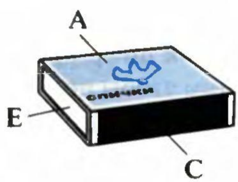


Рис. 8

32. Пусть X — это время, которое вы тратите на путь от дома до школы, а Y — время на путь от школы до дома. Расположите на вероятностной шкале события:

$A=\{X < 20\text{ минут}\}$;
$B=\{X < 40\text{ минут}\}$;
$C=\{Y > X\}$; $D=\{Y < X\}$; $E=\{Y = X\}$.

Учтите, что в этой задаче у каждого может получиться свой ответ!

33. Решая предыдущую задачу, ученик получил расположение событий на вероятностной шкале, показанное на рисунке 9.

Рис. 9

а) Куда ученик обычно добирается быстрее: в школу или из школы?

б) Известно, что в школу можно добраться одним из следующих способов:

— пешком (около часа);
— на автобусе (около 15 минут);
— на метро (около 30 минут).

Каким из этих способов чаще всего пользуется ученик?

34. На двери первого подъезда стоит кодовый замок, в котором нужно правильно нажать три цифры из десяти, а на двери второго подъезда — семь цифр из десяти. Порядок цифр при этом не учитывается. Верно ли, что, для того чтобы подобрать код второго замка, потребуется значительно больше времени, чем для первого?

35. Вы играете в «Поле чудес». Перед вами слово, которое вам абсолютно неизвестно и ни одна буква в нем еще не угадана. Какую букву вы назовете?

3 Как сравнивать события?*

Иногда удается установить взаимное расположение событий на вероятностной шкале с помощью элементарной логики.

Когда из наступления события B обязательно следует наступление события A, то говорят, что B влечет за собой A. В этой ситуации B является частью A и будет менее вероятным, чем A. Такое соотношение между A и B показано на рисунке 10.

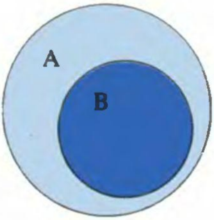


Рис. 10

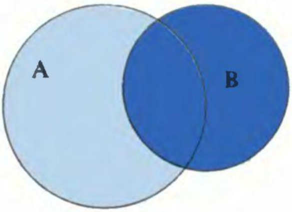


Рис. 11

Пример 1. Сравним между собой шансы наступления событий:

A={новый телевизор не сломается в течение месяца};
B={новый телевизор не сломается в течение года}.

Всякий раз наступление события B означает, что наступило и событие A. Обратное неверно: телевизор может служить исправно в течение ближайшего месяца, а в следующем — сломаться. Поэтому событие A более вероятно, чем событие B, — и это никак не зависит от марки телевизора!

Для изображенных на рисунке 10 событий так и хочется сказать «*A* больше *B*», однако к событиям этот термин стараются не применять. Дело в том, что далеко не всегда одно из двух событий больше или меньше другого (как это бывает с числами). Такие примеры рассмотрены ниже и даны на рисунке 11. Заметим, однако, что и в этом случае можно сравнивать между собой шансы событий — правда, для этого одной только логики уже недостаточно.

Пример 2. Попробуем сравнить шансы наступления событий:

A={новый телевизор не сломается в течение года};
B={новый компьютер не сломается в течение года}.

Даже если у вас есть оба этих завоевания цивилизации, определить, какое из двух событий вероятнее, будет очень непросто. Никакая логика здесь уже не поможет: для ответа на вопрос нужны статистические данные, которыми, скорее всего, располагают только компании по производству электроники.

Пример 3. Перед футбольным матчем «Спартак» и «Динамо» необходимо сравнить между собой шансы и расположить на вероятностной шкале события:

A={будет ничья};
B={не будет забито ни одного мяча};
C={«Спартак» не выиграет};
D={«Спартак» выиграет}.

Сравним между собой события *A* и *B*. Из наступления *B* следует *A* (ведь 0:0 — это ничья), а вот наоборот — не обязательно (может быть ничья 1:1, 2:2 и т. д.). Значит, событие *A* имеет больше шансов произойти, чем событие *B*.

Теперь сравним события *A* и *C*. Если произойдет *A* (ничья), то произойдет и *C* («Спартак» не выиграет), т. е. из *A* следует *C*. Значит, *C* более вероятно, чем *A*. Полученное соотношение между событиями *A*, *B*, *C* изображено на рисунке 12, а их взаимное расположение на вероятностной шкале — на рисунке 13.

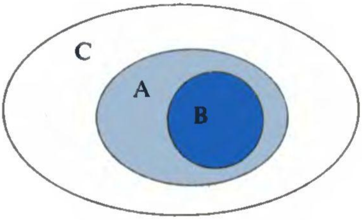


Рис. 12

Мы не зря сказали «взаимное расположение»: определить, к какому краю шкалы будут ближе перечисленные события, можно только располагая дополнительной информацией (например, статистикой матчей «Спартак» — «Динамо» за несколько последних лет).

Без этих данных невозможно определить и куда попадает на шкале событие D[1]: оно не влечет за собой ни одно из событий A, B, C и не является их следствием. Вы легко сообразите, что на рисунке 12 событием D будет все, что лежит вне C.

Рис. 13

36. Малыш наугад показывает пальцем точку на глобусе. Сравните между собой шансы событий:

A={он попадет в Россию};
B={он попадет в Сибирь};
C={он попадет в Восточное полушарие}.

37. Представьте, что вы купили карточку лотереи «Спортлото», в которой нужно правильно угадать 6 номеров из 49. Сравните между собой шансы событий:

[1] Можно заметить, правда, что событие D будет расположено на шкале симметрично событию C относительно центра шкалы — попробуйте объяснить это самостоятельно.

A={вы угадаете ровно 3 номера};
B={вы угадаете хотя бы 3 номера}.

38. В лифт, который может останавливаться на каждом из 10 этажей, вошли 10 человек. Изобразите на рисунке, как соотносятся друг с другом следующие события:

A={все выйдут на 6-м этаже};
B={найдется этаж, где никто не выйдет};
C={на 3-м этаже никто не выйдет}.

39. В финальный забег олимпийского турнира вышел российский спортсмен. Можно ли представить рисунком 14 соотношение следующих событий:

A={в забеге будет установлен рекорд России};
B={в забеге будет установлен олимпийский рекорд};
C={в забеге будет установлен мировой рекорд}?

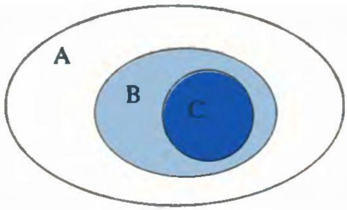


Рис. 14

40. Винни-Пух и Пятачок делят пополам 10 конфет, две из которых с сюрпризом. Расположите на вероятностной шкале следующие события:

A={Пятачку не досталось сюрпризов};
B={Пятачок получил два сюрприза};
C={Пятачок не остался без сюрприза}.

41. Одновременно бросают два кубика. Какие из следующих событий имеют больше шансов произойти, а какие — меньше:

A={сумма выпавших очков будет равна 2};
B={выпадет хотя бы одна единица};
C={сумма выпавших очков будет равна 12};
D={выпадет хотя бы одна шестерка};
E={выпадут две шестерки}?

42. В последней четверти отличник имел по русскому языку 5, а троечник — 3. Они пишут очередной диктант. Рассмотрим следующие события:

A={отличник сделает хотя бы одну ошибку};
B={троечник не сделает ни одной ошибки};
C={никто в классе не получит пятерку};
D={отличник и троечник не сделают ошибок}.

Какие пары этих событий можно подставить вместо многоточий в утверждение: «Событие ... более вероятно, чем событие ...»?

Какие пары событий нельзя подставить в это утверждение и каких сведений для этого не хватает?

43. Из перетасованной колоды карт случайным образом вытягивают одну карту. Изобразите на рисунке, как соотносятся друг с другом следующие события:

A={вытянут черную масть};
B={вытянут даму};
C={вытянут пику};
D={вытянут пиковую даму}.

Покажите на этом рисунке, куда попадают дама пик, дама треф, дама червей, дама бубен.

44. Одновременно подбросили 10 монет. Пусть N — количество монет, на которых выпал «орел». Какое из следующих событий самое вероятное и почему:

A={N=0}; *B={N=10};* *C={N=5};* *D={N>0}?*

45. В Машином классе 10 мальчиков и 10 девочек. Изобразите на рисунке, как соотносятся друг с другом следующие события:

A={все девочки родились в одном месяце};
B={есть две девочки, родившиеся в одном месяце};
C={одна из Машиных подруг родилась с ней в одном месяце};
D={есть два человека, родившихся в одном месяце}.

Можно ли придумать событие, которое «больше» события D? Почему?

4 Эксперименты со случаем

Частота абсолютная и относительная

Теория вероятностей имеет дело с экспериментами, исходы которых непредсказуемы: они зависят от случая. С такими экспериментами мы уже сталкивались — это подбрасывание монеты и кубика, раскручивание рулетки, падение бутерброда на пол и т. д.

Для всех этих экспериментов характерно то, что их можно многократно повторять (хотя бы мысленно) в одних и тех же условиях. Иногда эксперименты повторяет за нас кто-то другой или сама природа, а нам остается только наблюдать за их исходами. Например, узнавать итоги еженедельной лотереи, регистрировать уровень весеннего разлива рек и т. д.

Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. Для этого используют две важные величины:

абсолютная частота показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;

относительная частота (которую иногда называют просто **частотой**) показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительную частоту можно найти, поделив абсолютную частоту на число экспериментов. Иногда относительную частоту измеряют в процентах.

Пример 1. Проведем 50 экспериментов по подбрасыванию кубика. Исходы экспериментов будем заносить в таблицу. После чего вычислим абсолютную и относительную частоту каждого исхода.

В первом столбце таблицы перечислены все возможные исходы. Во втором столбце производилась регистрация исходов, а в третьем и четвертом — подсчет частот.

Исходы	Подсчет повторений	Абсолютная частота	Относительная частота
1	~~////~~ ////	9	0,18
2	~~////~~ /	6	0,12
3	~~////~~ ///	8	0,16
4	~~////~~ ~~////~~ /	11	0,22
5	~~////~~ ////	9	0,18
6	~~////~~ //	7	0,14
		50	1

Полученная таблица, как и многие другие в этом параграфе, обладает некоторыми замечательными свойствами, которые сохраняются независимо от результатов проведенных экспериментов:

— сумма абсолютных частот в ней равна числу экспериментов (в нашем случае — 50);

— сумма относительных частот равна 1.

Проверка этих свойств поможет вам избежать ошибок при заполнении аналогичных таблиц.

Удобным графическим способом представления абсолютных и относительных частот служат столбчатые диаграммы (**гистограммы**[1]), на которых каждая из частот изображается в виде столбика соответствующей высоты. Гистограмма относительных частот для рассмотренного примера построена на рисунке 15.

[1] От греческих слов *histos* — столб и *gramma* — запись.

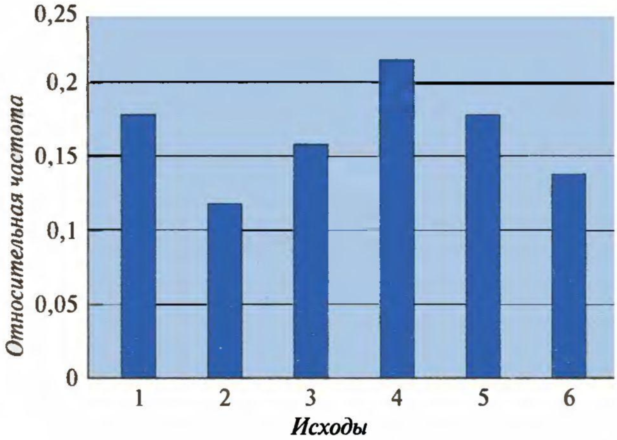


Рис. 15

По таблице и гистограмме хорошо видно, что четверка выпадала в наших экспериментах чаще остальных исходов, а двойка реже. Но можно ли на этом основании сказать, что исход «4» более вероятен, чем исход «2»? На этот вопрос мы сможем ответить позже, когда поближе познакомимся с поведением частот.

Пример 2. По результатам экспериментов примера 1 найдем абсолютную и относительную частоты случайных событий:

A={на кубике выпало четное число очков};
B={на кубике выпало нечетное число очков};
C={на кубике выпало число очков больше трех}.

Заметим, что теперь речь идет о частоте событий, а не исходов. Одному событию может соответствовать несколько разных исходов — этот вопрос будет подробно обсуждаться в дальнейшем.

Абсолютную частоту события *A* получим как сумму абсолютных частот исходов 2, 4, 6:

$$6 + 11 + 7 = 24.$$

Относительную частоту события A можно получить сложением относительных частот исходов 2, 4, 6:

$$0{,}12 + 0{,}22 + 0{,}14 = 0{,}48,$$

а можно делением абсолютной частоты A на количество экспериментов:

$$\frac{24}{50} = 0{,}48.$$

Аналогично получим частоты событий B и C.

События	Абсолютная частота	Относительная частота
A	24	0,48
B	26	0,52
C	27	0,54

В этой таблице сумма абсолютных частот уже не равна числу экспериментов, а сумма относительных частот больше 1. Что это — ошибка? Нет, просто на этот раз мы вычисляли частоту не взаимоисключающих исходов, а произвольных случайных событий. Некоторые из них могли происходить одновременно (например, A и C) — поэтому и сумма их абсолютных частот больше 50.

В некоторых задачах этого и следующего параграфов от вас потребуется провести несколько десятков или даже сотен случайных экспериментов. Чтобы не тратить на это слишком много времени, можно немного «схитрить»: договориться, что каждый из вас проведет свою небольшую серию опытов, после чего объединить все эти серии в одну.

Например, чтобы посчитать частоту выпадения «орлов» при проведении двухсот опытов, можно каждому из 20 учеников бросить монету всего 10 раз, а затем сложить полученные абсолютные частоты.

46. Учениками 7 «А» класса была проведена серия испытаний по подбрасыванию кубика. Полученные результаты представлены в таблице. Найдите относительную частоту каждого исхода.

Исходы	Абсолютная частота
1	26
2	25
3	19
4	27
5	25
6	28

47. Ученики 7 «Б» класса провели серию из 300 экспериментов по подбрасыванию кубика. Полученные результаты представлены в таблице. Найдите абсолютную частоту каждого исхода.

Исходы	Относительная частота
1	0,1533
2	0,1933
3	0,16
4	0,1533
5	0,1467
6	0,1933

48. В начале XX века английский математик Карл Пирсон провел серию экспериментов по подбрасыванию монеты, в результате чего получил следующую таблицу.

Исходы	Абсолютная частота
«Орел»	12 012
«Решка»	11 988

а) Сколько случайных опытов провел Пирсон?

б) Какова относительная частота выпадения «орлов» в его опытах?

в) Какова относительная частота выпадения «решек»?

49. Узнав о результатах эксперимента Пирсона по подбрасыванию монеты (см. предыдущую задачу), Олег провел свою серию экспериментов и получил следующие результаты.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
«Орел»	141	
«Решка»		0,53

В этой таблице он не стал заполнять все клетки, посчитав это излишним. Прав ли Олег? Если да, восстановите недостающие значения.

50. Найдите относительную частоту появления каждой из 33 букв русского алфавита на этой странице (все другие символы не учитывайте). Нарисуйте гистограмму частот. По полученным данным найдите частоты событий:

A={буква является гласной};
B={буква является согласной}.

Как вы думаете, на какую особенность языка указывает соотношение этих частот?

51. Найдите относительную частоту появления слов различной длины на этой странице. По полученным данным нарисуйте гистограмму частот и найдите частоты событий:

A={длина слова = 2};
B={длина слова > 2};
C={длина слова ⩾ 2}.

Какая длина слова имеет наибольшую частоту? Можно ли утверждать то же самое о всей книге?

52. Проведите 100 испытаний по подбрасыванию двух одинаковых монет и заполните таблицу. Чем вы объясните, что последний исход повторяется чаще других?

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
Обе монеты выпали на «орла»		
Обе монеты выпали на «решку»		
Одна на «орла», другая на «решку»		

53. Перед вами таблица абсолютных частот всех возможных исходов, полученная после проведения 100 экспериментов по подбрасыванию двух кубиков.

1-й кубик / 2-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	6	2	6	4	1	0
2	6	2	3	6	3	3
3	4	2	1	3	4	0
4	2	3	3	2	5	0
5	1	0	7	2	0	1
6	2	2	2	7	3	2

С помощью этой таблицы найдите относительные частоты следующих событий:

A={на кубиках выпало одинаковое число очков};
B={сумма очков на кубиках равна 11};
C={произведение очков на кубиках равно 11};
D={на 1-м кубике выпало больше, чем на 2-м};
E={на 2-м кубике выпало больше, чем на 1-м}.

Придумайте еще три случайных события, связанных с этим экспериментом, и найдите их частоты.

54. В урне 3 красных, 3 желтых и 3 зеленых шара. Из нее 150 раз подряд извлекались и возвращались обратно три шара. По результатам испытаний была заполнена таблица.

Исходы	Абсолютная частота
3к	3
3ж	5
3з	2
2к1ж	16
2к1з	14
2ж1к	27
2ж1з	23
2з1к	15
2з1ж	13
1к1ж1з	32

С помощью этой таблицы найдите относительные частоты следующих событий:

A={все вынутые шары одного цвета};
B={все вынутые шары разного цвета};
C={среди вынутых шаров нет красных};
D={среди вынутых шаров есть красные}.

Придумайте какое-нибудь случайное событие, связанное с проведенным экспериментом, относительная частота которого больше 0,5.

55. Дано распределение дней рождения жителей города Юрьевска по месяцам и дням недели.

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Январь	21	37	32	28	36	20	14
Февраль	22	23	23	31	30	30	27
Март	25	30	34	25	28	18	27
Апрель	18	28	21	25	26	26	32
Май	27	30	25	26	27	28	25
Июнь	22	19	30	31	29	30	26
Июль	28	27	16	25	31	22	33
Август	28	28	30	22	25	22	20
Сентябрь	22	25	31	32	30	22	28
Октябрь	28	21	25	31	30	25	28
Ноябрь	28	24	22	21	30	26	25
Декабрь	27	29	21	20	28	27	25

Найдите относительные частоты событий:

A={юрьевец родился в майское воскресенье};
B={юрьевец родился в зимний четверг};
C={юрьевец родился в понедельник};
D={юрьевец родился весной}.

56. По таблице из задачи 53, полученной при 100-кратном бросании двух кубиков, заполните таблицу абсолютных и относительных частот для сумм выпадавших очков. У к а з а н и е. Сумма может превышать значения, равные 2, 3, 4, ..., 12.

Нарисуйте гистограмму относительных частот. Какие значения суммы выпадали наиболее часто? Какие наименее часто? Как это можно объяснить?

57. Проведите 100 испытаний по подбрасыванию трех кубиков. После каждого опыта найдите сумму двух наименьших из выпавших значений и результаты занесите в таблицу.

Сумма двух наименьших	Абсолютная частота	Относительная частота
2		
3		
...		
11		
12		

Нарисуйте гистограмму относительных частот. Сравните ее с гистограммой, полученной в задаче 56. В чем отличие этих гистограмм?

58. Для проведения случайного эксперимента возьмите тетрадный лист в линейку и зубочистку. Подбросьте зубочистку так, чтобы она упала на лист, и подсчитайте, сколько линеек она пересекла.

а) Какое наименьшее и какое наибольшее количество линеек может пересечь зубочистка? Для ответа на этот вопрос измерьте расстояние между линейками и длину зубочистки.

б) Повторите этот эксперимент 100 раз. Результаты занесите в таблицу.

Количество линеек	Абсолютная частота	Относительная частота
0		
1		
2		
...		

в) Найдите относительную частоту события:

A={зубочистка пересекла хотя бы одну линейку}.

г) Нарисуйте гистограмму относительных частот. Какое количество линеек чаще всего пересекает зубочистка?

59*. Ученики получили задание выяснить, кто чаще страдает близорукостью — мужчины или женщины. Каждый из них, опросив какое-то количество мужчин и какое-то количество женщин, выяснил, что относительная частота близоруких среди мужчин больше, чем среди женщин. Следует ли отсюда, что во всей совокупности опрошенных близорукие мужчины встречались чаще, чем близорукие женщины?

60*. Частота пробелов в некотором тексте равна 0,12 (пробел — это пропуск между словами). Какова средняя длина слова в этом тексте?

5 Куда стремятся частоты?

Статистическое определение вероятности

В предыдущем параграфе мы находили абсолютные и относительные частоты после завершения всей серии случайных экспериментов. Выясним, что происходит с частотами в ходе такой серии. Для этого будем вычислять частоты после проведения каждой «порции» испытаний. Чем больше экспериментов удастся при этом провести, тем точнее будут наши результаты.

Пример 1. Была продолжена серия опытов с кубиком (см. пример 1 из § 4), но относительная частота шести исходов вычислялась после каждой очередной сотни экспериментов. В результате была получена следующая таблица.

Количество испытаний	Частота исходов					
	1	2	3	4	5	6
50	0,18	0,12	0,16	0,22	0,18	0,14
100	0,16	0,16	0,2	0,15	0,19	0,14
200	0,16	0,135	0,185	0,16	0,18	0,18
300	0,167	0,160	0,163	0,153	0,183	0,173
400	0,168	0,153	0,175	0,163	0,185	0,158
500	0,164	0,146	0,182	0,160	0,186	0,162
600	0,152	0,157	0,183	0,153	0,188	0,167
700	0,153	0,164	0,180	0,151	0,186	0,166
800	0,159	0,164	0,181	0,155	0,180	0,161
900	0,156	0,164	0,183	0,166	0,171	0,160
1000	0,158	0,170	0,182	0,165	0,168	0,157

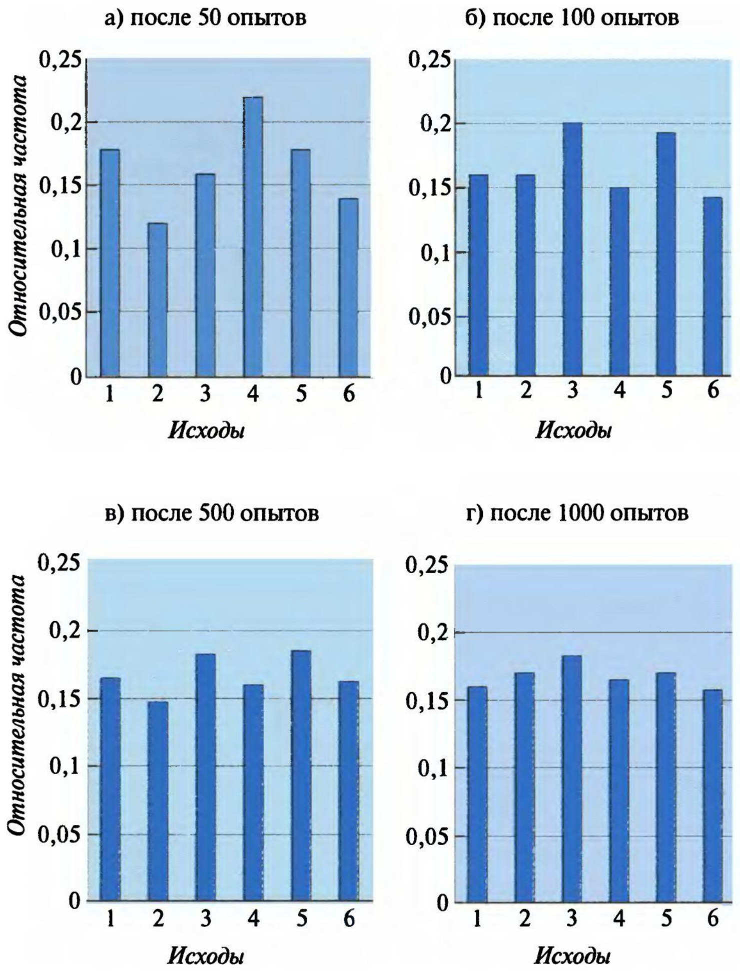


Рис. 16

Чтобы понять, что происходило при этом с относительными частотами шести исходов, посмотрим на рисунок 16, где изображены их гистограммы после 50, 100, 500 и 1000 опытов. На них хорошо видно, что все шесть частот вначале испытывают значительные колебания, а потом стабилизируются около значений 0,15—0,18.

То же самое можно увидеть, нарисовав график зависимости какой-нибудь из частот от числа экспериментов. На рисунке 17 такой график нарисован для частоты выпадения единиц.

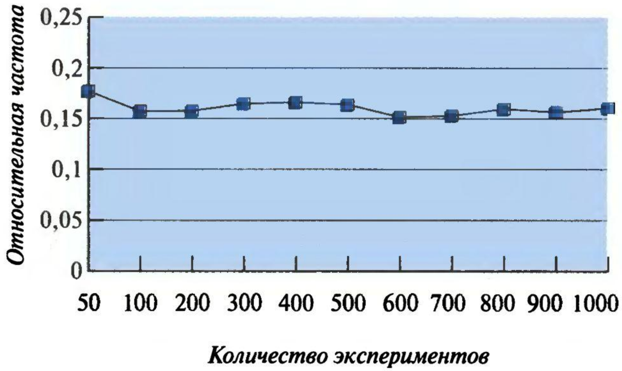


Рис. 17

Устойчивость частот является скорее не математическим, а экспериментальным фактом. На нем основывается частотное, или **статистическое, определение вероятности:** *за вероятность случайного события можно приближенно принять его относительную частоту, полученную в длинной серии экспериментов.* Чем больше число проведенных экспериментов, тем точнее можно оценить вероятность события по его частоте.

Конечно, это определение вероятности не совсем «настоящее»: ведь, какой бы длинной ни была наша серия экспериментов, частота все равно будет колебаться. Например, в рассмотренной выше серии из 1000 экспериментов частота продолжает колебаться между 0,15 и 0,18. Нет также полной уверенности, что в дальнейшем частота не выскочит из этого интервала.

Уже в следующем параграфе мы научимся точно вычислять вероятность и узнаем, что в рассмотренном примере она равна $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Однако и в дальнейшем мы будем возвращаться к данному выше статистическому определению вероятности, очень полезному для практического применения.

Пример 2. По результатам примера 1 проследим, как изменяются частоты следующих событий, и оценим их вероятности:

A={на кубике выпало четное число очков};
B={на кубике выпало нечетное число очков}.

Чтобы найти относительную частоту события A, нужно сложить частоты исходов 2, 4 и 6, а для события B — исходов 1, 3 и 5.

Количество испытаний	Частота событий	
	A	B
50	0,48	0,52
100	0,45	0,55
200	0,475	0,525
300	0,487	0,513
400	0,473	0,528
500	0,468	0,532
600	0,477	0,523
700	0,481	0,519
800	0,48	0,52
900	0,49	0,51
1000	0,492	0,508

Поведение этих частот при увеличении числа испытаний изображено на рисунке 18.

Полученные после 1000 опытов значения 0,492 и 0,508 можно взять в качестве приближенных вероятностей событий A и B (как вы уже, наверное, догадались, точные значения этих вероятностей — 0,5 и 0,5, но об этом — только в следующем параграфе) .

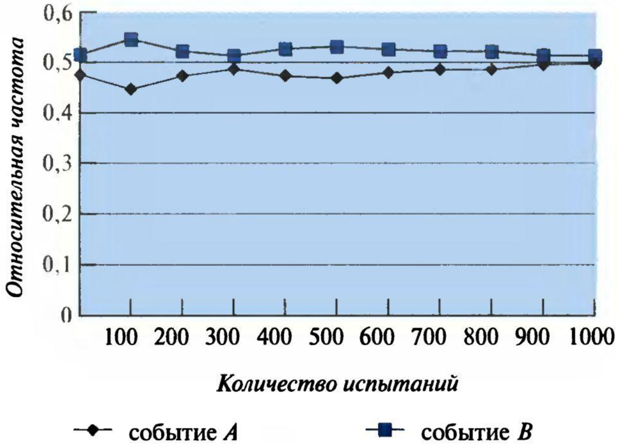


Рис. 18

При малом количестве опытов полученная частота дает очень искаженное, а иногда и просто ошибочное представление о вероятности.

Пример 3. После десяти бросаний двух кубиков сумма 12 не была получена ни разу. Можно ли утверждать, что вероятность этого события равна нулю?

Конечно, нет. Слишком мало было сделано испытаний. Даже возможных значений суммы больше — их 11 (от 2 до 12), поэтому какое-то из них заведомо еще не выпадало.

Еще раз напомним, что относительная частота любого случайного события вычисляется как дробь $\frac{n}{N}$, где N — общее число проведенных экспериментов, n — число экспериментов, в которых данное событие произошло.

Из этой формулы легко получить несколько интересных свойств относительной частоты:

— для невозможного события $n = 0$, поэтому его частота всегда равна 0;

— для достоверного события $n = N$, поэтому его частота всегда равна 1;

— для любого случайного события $0 \leqslant n \leqslant N$, поэтому его частота всегда лежит в диапазоне от 0 до 1.

А можно ли, получив нулевую частоту, сделать вывод о невозможности данного события? Разумеется, нет. Точно так же, если частота события равна 1, это еще не означает достоверность данного события. Примеры вы легко сможете привести сами.

61. Проведите 100 испытаний по подбрасыванию монеты. После каждых 10 испытаний подсчитывайте частоты и заполняйте таблицу.

Кол-во опытов	«Орел»		«Решка»		Разность абс. частот	Разность отн. частот
	Частота абс.	Частота отн.	Частота абс.	Частота отн.		
10						
...						
100						

Как вы думаете, к каким числам приближается с ростом числа проведенных опытов:

а) относительная частота выпадения «орлов»;

б) относительная частота выпадения «решек»;

в) разность относительных частот «орлов» и «решек»;

г) разность абсолютных частот «орлов» и «решек»?

Если для ответа на эти вопросы, на ваш взгляд, не хватает статистических данных, проведите необходимое количество дополнительных экспериментов.

62. Чем можно объяснить симметрию двух графиков из примера 2? Что будет их осью симметрии?

63. После 100 испытаний по подбрасыванию монеты частота «орлов» равнялась 0,52.

а) Можно ли утверждать, что после 200 испытаний она будет между 0,5 и 0,52?

б) Найдите минимально и максимально возможные в этой ситуации значения частоты после 200 испытаний.

64. Проведите серию испытаний с подбрасыванием кнопки и оцените вероятность каждого из двух исходов: «кнопка упадет острием вверх» и «кнопка упадет острием вниз». Нарисуйте графики изменения каждой из этих частот. Чему равна сумма этих графиков?

65. Пусть вам требуется оценить вероятности исходов в экспериментах по подбрасыванию: а) монеты; б) кнопки; в) кубика; г) пуговицы. В каких из этих ситуаций вы готовы дать ответ, не проводя эксперимента? Почему?

66. Женя купил два лотерейных билета, и один из них оказался выигрышным. Можно ли утверждать, что вероятность выигрыша в лотерею $\frac{1}{2}$?

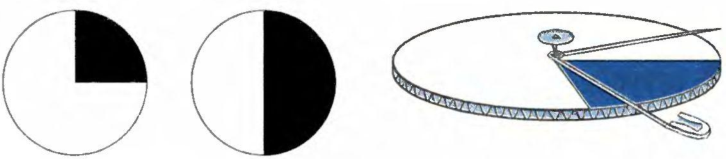
67. За последние 50 тиражей лотереи «6 из 49» в 12 тиражах угадывались все шесть номеров. Можно ли утверждать, что вероятность угадать 6 номеров из 49 будет приблизительно равна $\frac{12}{50}$?

68. За 20 последних тиражей «Спортлото» номер 8 выигрывал три раза, а номер 13 — ни разу. Можно ли утверждать, что шансы номера 13 в предстоящем тираже выше?

69. Из колоды друг за другом вытянули без возвращения 20 карт, среди которых оказалось три шестерки и ни одного туза. Верно ли, что следующей картой вероятнее будет туз, чем шестерка?

70. После 1000 испытаний монеты «орел» выпал 542 раза, а «решка» — только 458 раз. К какому значению будет приближаться относительная частота «орлов» и «решек», если в каждой следующей тысяче опытов их будет выпадать поровну?

71. Нарисуйте на листе плотного (лучше гофрированного) картона вертушки, изображенные на рисунке 19, *а*, прикрепите к каждой из них кнопкой английскую булавку (рис. 19, *б*) и проведите одновременно с двумя вертушками 100 случайных экспериментов. По их результатам заполните таблицу относительных частот.



а) *б)*

Рис. 19

а) Как вы думаете, к каким числам приближаются эти частоты с ростом числа опытов?

б) Придумайте сами две разные вертушки, для которых эти частоты приближаются к одному и тому же числу.

в) Можно ли придумать такие вертушки, для которых эти частоты приближаются к $\frac{1}{2}$?

Кол-во испытаний	Обе стрелки остановились на черном	Обе стрелки остановились на белом
10		
20		
...		
100		

72. Какое из следующих событий кажется вам более вероятным:

A={после двух бросаний монеты число «орлов» равно числу «решек»};

B={после двухсот бросаний монеты число «орлов» равно числу «решек»};

C={после двух тысяч бросаний монеты число «орлов» равно числу «решек»}?

Какими статистическими данными, приведенными в этом параграфе, вы можете подтвердить свой ответ?

73*. Придумайте пример такой бесконечной серии испытаний с монетой, в которой разность абсолютных частот выпадения «орлов» и «решек» неограниченно возрастает, а разность относительных частот уменьшается и приближается к нулю. Как вы думаете, что будет происходить с этими разностями в реальной серии испытаний?

74. Два игрока по очереди бросают монету, причем выигрывает тот, у кого раньше выпадет «орел». Оцените вероятность выигрыша каждого из игроков. Для этого проведите необходимое, на ваш взгляд, количество случайных экспериментов.

75. Выполняя задание 61, Вова поленился 100 раз бросать монету и выписал, как ему показалось, случайную последовательность «орлов» и «решек» из головы. Маша честно бросила монету все 100 раз. Сравните приведенные результаты со своим и определите, какой из них Вовин, а какой — Машин.

1-й результат:

ОООРОРООРР РРРОООРРРО ОРОРРОРРРО РРОРОРРОРР
ОРООООРООО ОРРРРОРРРР ОРОООРРРРО РРОРОРРРРО
ОООРОРООРР РРРРООРОРР

2-й результат:

ООРОРРООРР ОРОРОРРООР ОРООРОРОРО РРОРОРООРР
ОРОРРОРОРО ОРОРРОРОРР ОРООРРОРРО РООРОРООРО
РООРОРООРР РОРРООРОРР

Указание. Для сравнения результатов изобразите на графике, как изменяется разность абсолютных частот «орлов» и «решек» с ростом числа экспериментов. Такие графики для 1-го и 2-го результатов изображены на рисунке 20. Какой из них больше похож на ваш?

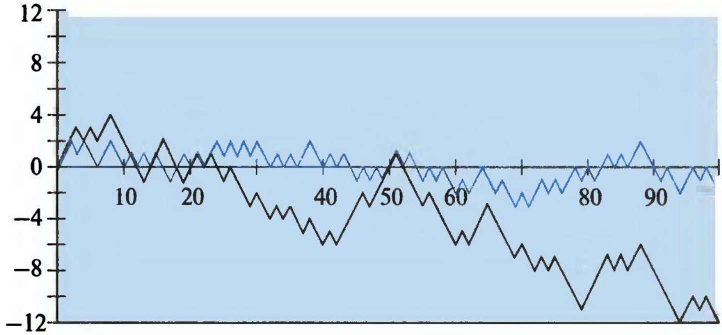


Рис. 20

76. Один из самых древних способов шифровки текста состоит в сдвиге всего алфавита на фиксированное число позиций k. Например, при $k = 3$ буква «а» заменяется на букву «г», буква «б» на «д», ..., «я» на «в». Этим способом пользовался в своих письмах еще Юлий Цезарь, поэтому его называют *кодом Цезаря*. Расшифруйте текст, зашифрованный кодом Цезаря:

М ТВНШ ЪН ЬТЭТЧШНСЪИВ ХФ ЯХБШХЮН. ПЮМ ЬЫЧШНУН ЩЫТЦ ЯТШТУЧХ ЮЫЮЯЫМШН ХФ ЫСЪЫРЫ ЪТОЫШЙЕЫРЫ ДТЩЫСНЪН, ЧЫЯЫЭИЦ СЫ ЬЫШЫПХЪИ ОИШ ЪНОХЯ ЬАЯТПИЩХ ФНЩТЯЧНЩХ Ы РЭАФХХ. ОЫШЙЕНМ ДНЮЯЙ ХФ ЪХВ, Ч ЮДНЮЯХЛ СШМ ПНЮ, ЬЫЯТЭМЪН, Н ДТЩЫСНЪ Ю ЫЮЯНШПЪИЩХ ПТЖНЩХ, Ч ЮДНЮЯХЛ СШМ ЩТЪМ, ЫЮЯНШЮМ ГТШ.

Указание. Каждая буква алфавита встречается в нашем языке с определенной частотой. Таблица этих частот следующая.

А	0,062	З	0,016	О	0,090	Х	0,009	Ь	0,013
Б	0,014	И	0,062	П	0,023	Ц	0,004	Э	0,003
В	0,038	Й	0,010	Р	0,040	Ч	0,012	Ю	0,006
Г	0,013	К	0,028	С	0,045	Ш	0,006	Я	0,018
Д	0,025	Л	0,035	Т	0,053	Щ	0,003		
Е	0,072	М	0,026	У	0,021	Ъ	0,001		
Ж	0,007	Н	0,053	Ф	0,002	Ы	0,016		

По таблице можно построить гистограмму частот для всех букв русского алфавита — она изображена на рисунке 21. Попробуйте построить такую таблицу и гистограмму для зашифрованного текста и после этого определить величину сдвига, использованную в коде Цезаря.

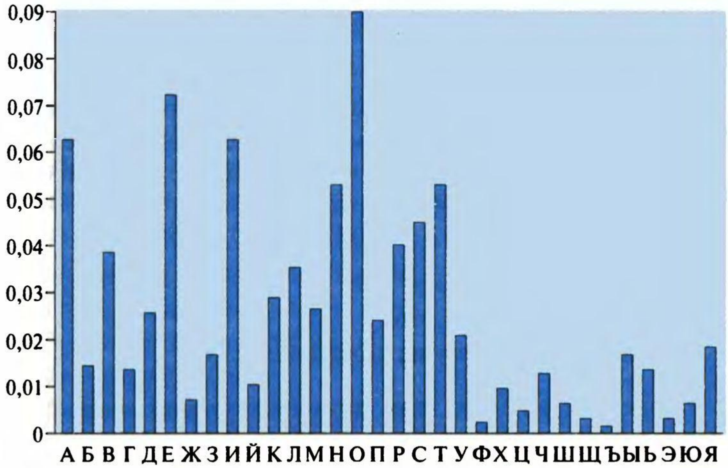


Рис. 21

6 Всегда ли нужно бросать монету?

Классическое определение вероятности

Итак, мы научились оценивать вероятность случайного события по относительной частоте его появления в длинной серии одинаковых опытов. Можно назвать такую вероятность экспериментальной или «апостериорной» (от лат. *a posteriori* — на основании опыта).

Но, во-первых, какой бы длинной ни была проведенная серия испытаний, она даст только приближенное значение вероятности. Во-вторых, далеко не всегда такую серию можно осуществить: скажем, на экспериментальное вычисление вероятности выигрыша в лотерею вам может просто не хватить денег! К счастью, во многих ситуациях существуют более экономичные «априорные» способы расчета вероятностей (от лат. *a priori* — заранее, независимо от опыта).

Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причем все исходы **равновозможны,** т. е. нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.

Например:

а) бросаем монету: $n = 2$;
б) бросаем кубик: $n = 6$;
в) вытягиваем карту из колоды: $n = 36$.

Конечно, во всех этих примерах можно говорить о равновозможности только при определенных условиях: монета и кубик правильные, колода хорошо перетасована и т. д.

Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A. Будем называть такие исходы **благоприятными** для этого события (они ему благоприятствуют, т. е. событие A наступает при любом из этих исходов).

Например:

а) выпадет герб: $m = 1$;

б) на кубике выпадет четное число: $m = 3$;

в) из колоды вытянут туза: $m = 4$.

Вероятностью случайного события A в этой ситуации назовем дробь $\frac{m}{n}$, где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, благоприятных для события A:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Обозначение $P(A)$ происходит от первой буквы французского слова *probabilite* — вероятность.

Например:

а) P *{выпадет герб}* $= \frac{1}{2}$;

б) P *{на кубике выпадет четное число}* $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

в) P *{из колоды вытянут туза}* $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Пример 1. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вытянули из нее одну карту. Для каждого из следующих событий найдем его вероятность:

A={вытянули красную масть};
B={вытянули пику};
C={вытянули красную пику};
D={вытянули даму};
E={вытянули даму пик}.

Все пять событий относятся к одному и тому же случайному эксперименту — вытягиванию карты из полной колоды. Общее число исходов в этом эксперименте равно

36 (по числу разных карт), причем, поскольку колода хорошо перетасована, все они равновозможны, следовательно, $n = 36$.

Для события A благоприятный исход — любая карта красной масти. В колоде 18 карт красной масти, значит, $m = 18$.

Следовательно, $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Для события B благоприятный исход — любая пика. Таких исходов 9 (столько в колоде карт пиковой масти): $m = 9$. Отсюда $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Совершенно аналогично находим число благоприятных исходов и вероятности для оставшихся событий:

для события C $m = 0$, $P(C) = \frac{0}{36} = 0$;

для события D $m = 4$, $P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$;

для события E $m = 1$, $P(E) = \frac{1}{36} = 0{,}028$.

Рассмотренное выше определение вероятности было впервые дано в работах французского математика Лапласа и называется **классическим**. *Использовать его можно только для опытов с равновозможными исходами!*

Другой великий француз — Даламбер — вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов.

Пример 2. Ошибка Даламбера. Какова вероятность, что подброшенные вверх две правильные монеты упадут на одну и ту же сторону?

Решение, предложенное Даламбером. Опыт имеет три равновозможных исхода:

1) обе монеты упали на «орла»;

2) обе монеты упали на «решку»;

3) одна из монет упала на «орла», другая на «решку».

Из них благоприятными для нашего события будут 2 исхода, поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$.

Правильное (!) решение. Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1) первая монета упала на «орла», вторая тоже на «орла»;

2) первая монета упала на «решку», вторая тоже на «решку»;

3) первая монета упала на «орла», а вторая — на «решку»;

4) первая монета упала на «решку», а вторая — на «орла».

Из них благоприятными для нашего события будут 2 исхода, поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Даламбер совершил одну из самых распространенных ошибок, допускаемую при вычислении вероятности: он объединил два принципиально разных исхода в один. Чтобы не повторить эту ошибку, помните, что *природа различает все предметы*, даже если внешне они для нас неотличимы.

В этом параграфе мы будем вычислять вероятности событий, не проводя эксперимент, опираясь только на симметрию объектов опыта и равновозможность всех исходов.

Замечательно при этом, что вычисленная *a priori* вероятность оказывается тем самым числом, к которому будет стремиться частота при неограниченном увеличении числа опытов.

Ничего «мистического» в этом совпадении нет: ведь если все n возможных исходов эксперимента равновозможны, то их относительные частоты должны быть приблизительно равны. Поскольку в сумме они всегда дают 1, то каждая из частот с ростом числа экспериментов будет приближаться к $\frac{1}{n}$. Относительная частота события

A будет равна сумме m из этих n частот и, значит, будет приближаться к $\frac{m}{n}$. Поэтому наше новое, классическое определение вполне согласуется с данным ранее статистическим.

77. Для каждого из следующих событий найдите число всех равновозможных исходов, число благоприятных исходов и вероятность.

а) В урне 15 белых и 25 черных шаров. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

б) Из русского алфавита случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

в) Из слова СОБЫТИЕ случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

г) Из 365 дней 2001 года случайно выбирается один. Какова вероятность, что он будет воскресеньем, если известно, что 2001 год начинается в понедельник?

78. Определите вероятности следующих событий:

A={при бросании монеты выпал «орел»};

B={при бросании кубика выпала тройка};

C={при бросании кубика выпало четное число};

D={из колоды карт вытянули туза};

E={из колоды карт вытянули шестерку};

F={из колоды карт вытянули не туза}.

79. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и набрал ее наудачу, помня только, что эта цифра нечетная. Найдите вероятность того, что номер набран правильно.

80. Федя хочет определить, с какой вероятностью при бросании двух кубиков можно получить сумму в 12 очков.

Он рассуждает так: сумма очков на двух кубиках может равняться любому из 11 чисел от 2 до 12. Значит, вероятность получить 12 очков будет $\frac{1}{11}$. Прав ли Федя?

81. Какова вероятность того, что у случайно выбранного жителя Земли день рождения приходится на:

а) 1 января; б) 28 февраля; в) 29 февраля?

82. Вы должны получить квартиру в строящемся 40-квартирном доме.

а) Какова вероятность того, что в ее номере не будет нечетных цифр?

б) Вам сообщили, что в номере вашей будущей квартиры не будет нечетных цифр. С какой вероятностью вы может угадать этот номер?

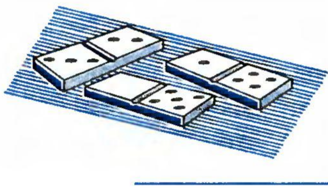
83. В классе учится 10 мальчиков и 20 девочек.

а) На класс дали один билет в цирк, который решено разыграть по жребию. Какова вероятность, что в цирк пойдет девочка?

б) Учитель истории знает, что 3 мальчика и 5 девочек из класса были накануне в кино, поэтому не выучили домашнее задание. К сожалению, он не знает их фамилий, но очень хочет поставить кому-нибудь двойку. Кого ему лучше вызвать к доске — мальчика или девочку?

в) Федя не решил домашнюю задачу по математике. Какова вероятность, что учитель этого не узнает, если за урок он успевает спросить пятерых?

84. Какова вероятность того, что «доминошка», наудачу извлеченная из полного набора домино, имеет сумму очков, равную 5 (см. рис.)?



85. 1) Для школьного новогоднего вечера напечатали 125 пронумерованных пригласительных билетов, между которыми предполагается разыграть главный приз. Какова вероятность, что номер счастливчика будет заканчиваться:

а) на тройку; б) на девятку?

2) В условиях задачи 1) Вова получил пригласительный билет с номером 33, а Таня — 99. Верно ли, что у Вовы больше шансов получить главный приз?

86. Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10 см. Какова вероятность того, что из наудачу выбранных трех отрезков можно составить треугольник?

Б

87. Наудачу выбрано двузначное число. Определите вероятность того, что оно оказалось:

а) простым;
б) составным;
в) кратным пяти;
г) взаимно простым с числом 100?

88. Наудачу выбрано число от 1 до 1 000 000. Какова вероятность того, что оно является полным квадратом?

89. 1) В корзине яблоко и груша. Вытаскиваем из нее один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

2) В корзине 2 яблока и груша. Вытаскиваем из нее 2 фрукта. Какова вероятность того, что оба фрукта яблоки?

3) В корзине N яблок и груша. Вытаскиваем из нее N фруктов. Какова вероятность, что все они яблоки?

90. 1) У маленькой Вари две одинаковые пары варежек. Уходя на улицу, она наугад берет две варежки. Какова вероятность того, что они окажутся парными (т. е. на разные руки)?

2) Варя потеряла одну из варежек на улице, и теперь их у нее три. Уходя на улицу, она по-прежнему выбирает две варежки случайным образом. Какова на этот раз вероятность, что они окажутся парными?

91. 1) Из колоды домино изъяли все «доминошки» с пустышками и после этого наудачу выбрали одну «доминошку». Какова вероятность, что сумма очков на ней равна 5?

2) Бросили два кубика. Какова вероятность, что сумма очков на них равна 5?

92. 1) В лотерее участвует 100 билетов и разыгрывается один приз. Какова вероятность того, что вы ничего не выиграете на свой единственный билет?

2) Участвуя в той же лотерее, вы купили 20 билетов. Какова вероятность, что вы опять останетесь ни с чем?

93. Монету бросают до первого появления «орла». Какова вероятность, что для этого понадобится:

а) одно бросание; б) два бросания; в) три бросания?

94. Кубик бросают до первого появления шестерки. Какова вероятность, что для этого понадобится:

а) одно бросание; б) два бросания; в) три бросания?

95*. Придумайте такие длины четырех отрезков, чтобы вероятность составить треугольник из наудачу выбранных трех отрезков получилась равной:

а) 0; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; г) 1.

96*. Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали шляпы наугад. Найдите вероятности следующих событий:

A={каждый надел свою шляпу};
B={все надели чужие шляпы};
C={двое надели чужие шляпы, а один — свою};
D={двое надели свои шляпы, а один — чужую}.

7 События элементарные и не очень

Еще раз об исходах и событиях

Говоря в предыдущих параграфах об **исходах случайного эксперимента**, мы имели в виду, что в результате эксперимента один (и только один!) из этих исходов обязательно произойдет. То есть, с одной стороны, не могут произойти сразу два исхода, с другой — эксперимент не может завершиться вообще без какого-либо исхода. Именно эти два свойства выделяют исходы среди всех остальных случайных событий.

Например, при бросании кубика обязательно выпадет ровно одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. В то же время из двух случайных событий:

A={выпало четное число очков};
B={выпало число очков, больше трех}

может не произойти ни одного или, наоборот, могут произойти сразу оба.

Чтобы подчеркнуть это отличие исходов от обыкновенных событий, математики называют исходы **элементарными событиями**. Они элементарны в том смысле, что состоят из одного исхода. А вот любое неэлементарное событие будет состоять из некоторого множества исходов, которые в предыдущем параграфе мы называли благоприятными для этого события.

На этом языке рассмотренные выше события *A* и *B* запишутся как множества исходов:

$A=\{2, 4, 6\};$
$B=\{4, 5, 6\}.$

Заметим, что если сложить относительные частоты исходов в любой серии экспериментов, то получится 1. При этом частота любого события будет складываться из частот входящих в него исходов.

Систему исходов в одном и том же эксперименте можно выбирать по-разному. От этого выбора будет зависеть, какие случайные события мы сможем потом через них выражать.

Немалую роль играют и обозначения исходов — чем они удачнее, тем легче перечислять исходы и выражать через них события.

Пример 1. Бросаем 2 кубика. В качестве множества всех возможных исходов возьмем все возможные пары чисел, которые могут выпасть на первом и втором кубиках.

Перечислить все такие исходы удобно с помощью таблицы.

1-й кубик / 2-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Каждый исход мы обозначили двузначным числом: первая цифра показывает, сколько очков выпало на первом кубике, вторая цифра — на втором кубике. Всего таких исходов будет 36. Через них можно выразить, например, следующие события:

A = {на кубиках выпало одинаковое число очков} = {11, 22, 33, 44, 55, 66};

2-й кубик \ 1-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	**11**	21	31	41	51	61
2	12	**22**	32	42	52	62
3	13	23	**33**	43	53	63
4	14	24	34	**44**	54	64
5	15	25	35	45	**55**	65
6	16	26	36	46	56	**66**

B = {на 1-м кубике выпало больше, чем на 2-м} =
= {21, 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65}.

2-й кубик \ 1-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	11	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**
2	12	22	**32**	**42**	**52**	**62**
3	13	23	33	**43**	**53**	**63**
4	14	24	34	44	**54**	**64**
5	15	25	35	45	55	**65**
6	16	26	36	46	56	66

C = {сумма очков на кубиках равна 11} = {56, 65}

2-й кубик \ 1-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	**65**
6	16	26	36	46	**56**	66

D = {сумма очков на кубиках четная} = {11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66}.

2-й кубик \ 1-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	**11**	21	**31**	41	**51**	61
2	12	**22**	32	**42**	52	**62**
3	**13**	23	**33**	43	**53**	63
4	14	**24**	34	**44**	54	**64**
5	**15**	25	**35**	45	**55**	65
6	16	**26**	36	**46**	56	**66**

Пример 2. Снова бросаем 2 кубика. Но на этот раз выберем в качестве множества элементарных исходов все возможные значения суммы чисел на кубиках.

Перечислим все возможные значения суммы:
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Через эти 11 исходов можно выразить только события C и D:

C={сумма очков на кубиках равна 11} = {11},

D={сумма очков на кубиках четная} = {2, 4, 6, 8, 10, 12},

но нельзя выразить события A и B:

A={на кубиках выпало одинаковое число очков},

B={на 1-м кубике выпало больше, чем на 2-м},

ведь по сумме очков не определишь, какое число выпало на каждом из кубиков.

Таким образом, чем «мельче» исходы, тем «богаче» набор случайных событий, которые можно через них выразить.

Выбор более мелких исходов имеет еще одно большое преимущество: *они очень часто оказываются равновозможными* (если, конечно, в опыте вообще присутствует какая-то симметрия). Так, в примере 1 все 36 исходов равновозможны, а 11 исходов примера 2 не равновозможны, и мы уже неоднократно в этом убеждались.

Пример 3. На шести карточках написаны цифры от 1 до 6. Карточки перемешивают и вытаскивают сначала одну из них, а затем другую. Здесь опять удобно использовать таблицу — только теперь она не будет содержать диагональных элементов 11, 22, 33, 44, 55, 66, поскольку цифры на карточках должны быть различны.

1-я карточка / 2-я карточка	1	2	3	4	5	6
1		21	31	41	51	61
2	12		32	42	52	62
3	13	23		43	53	63
4	14	24	34		54	64
5	15	25	35	45		65
6	16	26	36	46	56	

Исходов получилось не 36, как в примере 1, а только 30. Понятно, что все они равновозможны. (Если вы с этим не согласны, попробуйте выделить среди них более вероятные!)

Пример 4. Из тех же самых шести карточек вытаскивают две карточки одновременно. Теперь нет понятия «первая карточка — вторая карточка», поэтому исходов станет ровно в два раза меньше: например, исходы 12 и 21 будут теперь одним исходом.

Получается, что мы сворачиваем приведенную выше таблицу исходов по диагонали.

	21	31	41	51	61
		32	42	52	62
			43	53	63
				54	64
					65

Поскольку каждому исходу этой таблицы соответствуют ровно два исхода из предыдущей, то все 15 ее исходов также равновозможны.

Отметим одну интересную особенность последних двух примеров. Во многих задачах, где происходит случайный выбор из некоторой совокупности, не поясняется сама «технология» выбора: одновременно или последовательно выбираются предметы. Дело в том, что это абсолютно не влияет на результат, поэтому для решения задачи можно принять как одну, так и другую модель. Важно только не путать их в процессе решения: например, нельзя перечислять все возможные исходы, следуя примеру 3, а благоприятные исходы выбирать по примеру 4.

97. Проводится эксперимент по подбрасыванию кубика. Запишите каждое из следующих событий в виде множества благоприятных исходов:

A={выпало нечетное число};
B={выпало число больше 1};
C={выпало число меньше 1};
D={выпало простое число};
E={выпало число меньше 10}.

98. Петя и Саша провели 100 экспериментов по одновременному подбрасыванию двух одинаковых монет. Петя считал, что монеты неразличимы, и получил в результате следующую таблицу.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
Два «орла»	19	0,19
«Орел» и «решка»	52	0,52
Две «решки»	29	0,29

Саша заметил на каждой из монет «особые приметы» и в процессе эксперимента различал их, называя про себя «первой» и «второй». У него получилась такая таблица.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
«орел» — «орел»	19	0,19
«орел» — «решка»	28	0,28
«решка» — «орел»	24	0,24
«решка» — «решка»	29	0,29

Рассмотрите случайные события:

A={монеты выпали одной стороной};
B={на первой монете выпал «орел»};
C={хотя бы на одной из монет выпал «орел»}.

а) Какие из этих событий можно выразить через исходы первой таблицы? Выразите и найдите их частоты.

б) Какие из этих событий можно выразить через исходы второй таблицы? Выразите и найдите их частоты.

в) Какие и сколько исходов второй таблицы соответствуют каждому из исходов первой таблицы?

г) Исходы какой таблицы являются равновозможными?

99. Из урны, в которой 2 красных, 2 желтых и 2 зеленых шара, наугад достают два шара. Такой эксперимент повторяют 100 раз и по его результатам заполняют две различные таблицы.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
2к	7	0,07
2ж	6	0,06
2з	9	0,09
1к1ж	27	0,27
1к1з	26	0,26
1ж1з	25	0,25

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
КК	7	0,07
КЖ	14	0,14
КЗ	15	0,15
ЖК	13	0,13
ЖЖ	6	0,06
ЖЗ	10	0,10
ЗК	11	0,11
ЗЖ	15	0,15
ЗЗ	9	0,09

При заполнении первой таблицы учитывался только состав вынутой пары шаров, а при заполнении второй — порядок, в котором шары вынимались. Рассмотрите случайные события:

A={вынуты шары разного цвета};
B={первым вынут красный шар};
C={среди двух вынутых шаров нет красных}.

а) Какие из этих событий можно выразить через исходы первой таблицы? Выразите и найдите их частоты.

б) Какие из этих событий можно выразить через исходы второй таблицы? Выразите и найдите их частоты.

в) Какие и сколько исходов второй таблицы соответствуют каждому из исходов первой таблицы?

г) Являются ли исходы какой-либо из этих таблиц равновозможными?

100. Результаты 40 экспериментов по вытягиванию одной карты из перетасованной колоды представлены следующей последовательностью:

9♥, 6♣, В♦, 10♥, К♠, 6♦, 9♠, 6♦, 7♠, Т♦,
8♠, Д♣, 6♣, В♥, 6♠, Т♦, 7♠, 6♣, Д♠, Т♦,
7♠, К♥, Т♣, 6♥, 8♠, 6♦, 9♦, К♠, 7♥, 6♦,
В♠, 6♣, 10♦, 6♥, Д♠, 6♦, 10♠, 10♣, 7♣, В♦.

Найдите относительные частоты следующих событий:

A={вытянули красную масть};
B={вытянули пику};
C={вытянули даму};
D={вытянули пиковую даму}.

Какие из них можно назвать элементарными событиями?

101. Одновременно бросают три монеты. Придумайте и выпишите для этого опыта:

а) систему равновозможных исходов;

б) систему неравновозможных исходов.

102. Одновременно бросают три кубика. Предложите для этого опыта:

а) систему равновозможных исходов;

б) систему неравновозможных исходов;

в) любое событие, которое выражается через исходы системы а), но не выражается через исходы системы б).

103. Проводится эксперимент по определению дня рождения случайно выбранного человека. Придумайте систему исходов для такого эксперимента, которая содержала бы:

а) 7 исходов; б) 12 исходов; в) 366 исходов.

Исходы каких из этих трех систем являются равновозможными?

104. В шкафу находится 5 пар ботинок различных размеров. Из них случайно выбирают 4 ботинка. Придумайте, как можно обозначить равновозможные исходы такого эксперимента.

Для события A=*{среди вынутых ботинок нет парных}* выпишите какой-нибудь:

а) благоприятный исход;

б) неблагоприятный исход.

105. На шахматной доске случайным образом выбирают две клетки. Будем обозначать исходы такого эксперимента, указывая «шахматные» координаты первой и второй клеток, например a5g6. Выпишите по одному благоприятному исходу для каждого из следующих событий:

A=*{из первой клетки во вторую можно попасть ходом ладьи}*;

B=*{из первой клетки во вторую можно попасть ходом слона}*;

C=*{из первой клетки во вторую можно попасть ходом коня}*;

D=*{из первой клетки во вторую нельзя попасть ходом никакой фигуры}*.

Как вы думаете, какое из этих событий содержит больше всего исходов?

106. Винни-Пух и Пятачок делят пополам 10 конфет, две из которых с сюрпризом. Придумайте, как можно обозначить равновозможные исходы такого эксперимента. Выпишите по одному благоприятному исходу для каждого из следующих событий:

A={Винни-Пуху не досталось конфет с сюрпризом};

B={Пятачку не досталось конфет с сюрпризом};

C={Винни-Пуху и Пятачку досталось по одной конфете с сюрпризом}.

Есть ли у этих событий общие исходы? Есть ли исходы, которые не попадают ни в одно из этих событий?

Б

107. В задаче 99 пронумеруем каждую группу шаров одного цвета так, чтобы их можно было различать между собой: красные — к1, к2; желтые — ж1, ж2; зеленые — з1, з2. Теперь проведем тот же самый эксперимент по извлечению двух шаров.

а) Выпишите несколько исходов эксперимента, различая между собой все шары и порядок, в котором они вынимаются. Сколько всего таких исходов?

б) Выпишите несколько исходов эксперимента, различая все шары, но не учитывая порядок, в котором они вынимаются. Сколько всего таких исходов?

в) Сколько исходов пункта а) соответствует каждому из исходов пункта б)?

г) Будут ли исходы выбранных систем равновозможны?

108. Случайный эксперимент состоит в одновременном подбрасывании 5 монет. Придумайте систему исходов для такого эксперимента, которая содержала бы:

а) 32 исхода; б) 6 исходов.

Исходы какой системы являются равновозможными?

109. В автобусе едет 8 пассажиров. Каждый из них может с равными шансами выйти на любой из шести остановок. Маша и Никита спорят, что лучше взять в качестве исходов такого эксперимента.

Маша: каждый из 8 пассажиров может выйти на одной из 6 остановок. Предположим, что первый пассажир вышел на 3-й остановке, второй пассажир — на 6-й, третий — на 1-й и т. д. Тогда исходом эксперимента будет последовательность из восьми чисел, в которой каждому пассажиру соответствует номер его остановки, например: 36126441.

Никита: каждый исход нашего эксперимента — это разбиение числа 8 в сумму 6 неотрицательных целых чисел, например: $2 + 1 + 1 + 2 + 0 + 2$. В этом исходе на 1-й остановке вышло 2 пассажира, на 2-й — один пассажир и т. д.

Чьи исходы кажутся вам равновозможными и почему?

110. Три человека пришли в ресторан в одинаковых шляпах, сдали их в гардероб, а уходя, надели их наугад. Какое множество исходов можно выбрать в таком эксперименте, чтобы:

а) эти исходы были равновозможны;
б) эти исходы были неравновозможны?

111. Два человека по очереди бросают монету, причем выигрывает тот, у кого раньше выпадет «орел». Возможные исходы эксперимента следующие:

О, РО, РРО, РРРО, РРРРО, ...

Будут ли они равновозможными? При каких исходах выигрывает первый игрок? Сколько таких исходов?

112. 1) Ольга, Маша и Ирина каждый день тянут жребий — кому из них сегодня мыть посуду. Для этого они кладут в шляпку три бумажки, одна из которых помечена крестиком, а потом по очереди их вытаскивают: Ольга — первой, Маша — второй, а Ирина — третьей.

Каждая из сестер закодировала возможные исходы эксперимента по-своему.
Ольга: ×, 1×, 2×, 12×, 21×;
Маша: ×12, ×21, 1×2, 2×1, 12×, 21×;
Ирина: ×, 0×, 00×.

Объясните, что каждая из них имела в виду. Исходы какой из этих трех систем будут равновозможными?

2) Ольга предлагает изменить жребий следующим образом: каждая из них по очереди бросает монету, и у кого первой выпадет «орел», тому и мыть посуду. Очередность бросаний она предлагает оставить ту же.

Возможные исходы: О, РО, РРО, РРРО, РРРРО, ...

Будут ли они равновозможными? При каких исходах дежурить будет Ольга, при каких — Маша, при каких — Ирина?

113. «Любовь с первого взгляда».

В игре участвуют трое юношей и три девушки. Каждый юноша выбирает одну из девушек, а каждая девушка — одного из юношей. Если юноша и девушка выбрали друг друга, то образуется пара. Придумайте, как выбрать исходы этого эксперимента, чтобы они были равновозможны. Сколько всего таких исходов получится?

114. 1) Стержень длиной 1 м случайно ломают на три части. Закодируем исход такого опыта двумя числами X и Y из отрезка [0, 1], где X — координата первой точки излома, Y — координата второй точки.

Какие из следующих исходов благоприятны для события A=*{из полученных кусков можно составить треугольник}*:

а) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; в) (0,54; 0,36); г) (0,4; 0,9); д) (0,4; 0,8)?

Какие треугольники при этом получаются?

2)* Какое соотношение между X и Y должно выполняться для всех благоприятных исходов события A? Нарисуйте множество таких X и Y на координатной плоскости Oxy.

8 Вероятность и комбинаторика

Подсчет шансов в многоэтапных экспериментах

Вы уже умеете вычислять вероятности многих событий, не прибегая к статистическому эксперименту, *a priori*. Для этого нужно только, чтобы все исходы эксперимента были равновозможны. Напомним, что в этом случае вероятность любого события вычисляется как дробь

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, при которых наступает событие A (они называются благоприятными для A).

Самый надежный способ найти n и m — выписать все возможные и все благоприятные исходы, придумав для них подходящие обозначения. Этим вы занимались в предыдущем параграфе. Но во многих задачах исходов оказывается слишком много, тогда на помощь приходит комбинаторика — наука о переборе и подсчете комбинаций.

Рассмотрим случайный эксперимент из нескольких действий, производимых одновременно или друг за другом (такие эксперименты называют **многоэтапными**).

Например:

а) одновременно бросают две монеты;

б) два раза бросают одну и ту же монету;

в) друг за другом из колоды вынимают две карты, не возвращая карту обратно (**«выбор без возвращения»**);

г) друг за другом из колоды вынимают две карты, возвращая карту обратно (**«выбор с возвращением»**).

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ: если первое действие в эксперименте можно выполнить a способами, после чего второе действие — b способами, после чего третье — c способами и т. д., то общее число исходов всего эксперимента будет

$$n = a \cdot b \cdot c \cdot \ldots .$$

Например, в рассмотренных экспериментах:

а) одновременно бросают две монеты:

$$n = 2 \cdot 2 = 4;$$

б) два раза бросают одну и ту же монету:

$$n = 2 \cdot 2 = 4;$$

в) друг за другом из колоды вынимают две карты, не возвращая карту обратно («выбор без возвращения»):

$$n = 36 \cdot 35 = 1260;$$

г) друг за другом из колоды вынимают две карты, возвращая карту обратно («выбор с возвращением»):

$$n = 36 \cdot 36 = 1296.$$

Пример 1. Из колоды в 36 карт одну за другой вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета? Решим эту задачу в двух вариантах:

а) «Выбор без возвращения».

Подсчитаем общее количество исходов по правилу умножения: для первой карты у нас 36 вариантов, для второй — 35 вариантов (одну уже вытянули). Отсюда общее количество исходов

$$n = 36 \cdot 35 = 1260.$$

Теперь подсчитаем исходы, при которых обе карты одного цвета: для первой карты — 36 вариантов, для второй карты (если мы хотим, чтобы она была того же цвета, что и первая) — 17 вариантов. Отсюда количество благоприятных для нашего события исходов будет

$$m = 36 \cdot 17 = 612.$$

И искомая вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{612}{1260} = \frac{17}{35} \approx 0{,}486.$$

б) «Выбор с возвращением».

Отличие от пункта а) только в том, что можно повторно вытянуть ту же самую карту. Поэтому общее количество исходов будет

$$n = 36 \cdot 36 = 1296,$$

а количество благоприятных

$$n = 36 \cdot 18 = 648.$$

Вероятность, что карты окажутся одного цвета,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{648}{1296} = \frac{1}{2}.$$

Попробуйте объяснить, почему в пункте а) эта вероятность оказалась меньше.

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ: если все исходы эксперимента можно разбить на непересекающиеся классы, содержащие $a, b, c, \ldots$ возможных исходов, то общее число исходов всего эксперимента будет

$$n = a + b + c + \ldots .$$

Пример 2. На один ряд из 7 мест случайным образом рассаживаются 4 мальчика и 3 девочки. Какова вероятность того, что все девочки будут сидеть рядом?

Общее количество всех возможных вариантов расположения 7 человек в один ряд легко подсчитать с помощью правила умножения: на первое место может сесть любой из 7 человек, на второе — любой из 6 оставшихся и т. д. Всего получаем

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! \text{ исходов}^{1}.$$

---

[1] Напомним, что $N!$ — это факториал числа N, равный произведению всех натуральных чисел от 1 до N.

А вот для подсчета благоприятных исходов нам понадобится правило сложения. Сначала разобьем все благоприятные исходы на такие классы:

— девочки сидят на местах 1, 2, 3: **ДДД**ММММ;

— девочки сидят на местах 2, 3, 4: М**ДДД**МММ;

— девочки сидят на местах 3, 4, 5: ММ**ДДД**ММ;

— девочки сидят на местах 4, 5, 6: МММ**ДДД**М;

— девочки сидят на местах 5, 6, 7: ММММ**ДДД**.

Всего таких классов 5, остается только подсчитать количество исходов в каждом из них. Ясно, что оно будет одинаковым во всех классах: девочек можно рассадить по их местам 3! способами, мальчиков — 4! способами. Значит, общее число благоприятных исходов: $5 \cdot 3! \cdot 4!$. Получаем, что искомая вероятность равна:

$$P = \frac{5 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

ПРАВИЛО ВЫЧИТАНИЯ: для любого события число благоприятных исходов можно найти вычитанием числа неблагоприятных исходов из числа всех исходов эксперимента.

Пример 3. Вы получаете 6 карт из колоды. Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один туз?

Число всех равновозможных исходов данного эксперимента будет

$$n = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31.$$

Число неблагоприятных исходов, при которых среди 6 сданных карт нет тузов, равно

$$32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27,$$

а значит, по правилу вычитания число благоприятных исходов равно

$$m = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 - 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27.$$

Искомая вероятность равна

$$P = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 - 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 31} \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}465 = 0{,}535.$$

Наконец, очень часто при подсчете вероятностей возникает необходимость определить, сколькими способами можно выбрать k предметов из N? Например:

д) одновременно вынимают две карты из колоды;

е) наугад зачеркивают 6 чисел из 49;

ж) случайно отбирают трех человек из 25.

Число комбинаций, о которых идет речь в этих экспериментах, часто используется в математике. Оно называется **числом сочетаний из N по k** и обозначается C_N^k (читается «цэ из эн по ка»).

Чтобы найти, чему оно равно, применим правило умножения: первый предмет можно выбрать N способами, после этого второй предмет — $(N-1)$ способом, следующий — $(N-2)$ способами и т. д. Последний, k-й по счету предмет можно выбрать $(N-k+1)$ способами. Значит, по правилу умножения всего таких вариантов выбора будет:

$$N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

Но это еще не ответ: дело в том, что мы учитывали при таком подсчете не только состав выбранной комбинации, но и порядок, в котором выбираются предметы. Поэтому каждое сочетание из k предметов было подсчитано $k!$ раз. Нас же интересует только состав выбранного множества, поэтому для получения ответа нужно поделить найденное выражение на $k!$ (если угодно — применить «правило деления»):

$$C_N^k = \frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

Теперь можно найти общее количество исходов в каждом из приведенных выше экспериментов д)—ж):

д) одновременно вынимают две карты из колоды:

$$C_{36}^{2} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630;$$

е) наугад зачеркивают 6 чисел из 49-ти:

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13\,980\,000;$$

ж) случайно отбирают трех человек из 25:

$$C_{25}^{3} = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = 2300.$$

Пример 4. Класс, в котором учится 12 девочек и 12 мальчиков, случайным образом делят на две равные группы для занятий на компьютерах. Какова вероятность того, что мальчиков и девочек в них окажется поровну?

Переформулируем задачу: из 24 учеников этого класса случайно отбирают 12. Какова вероятность, что среди них ровно 6 мальчиков? (Убедитесь, что это действительно та же задача!) Всего способов выбора 12 человек из 24 будет

$$C_{24}^{12} = \frac{24!}{12! \cdot 12!} = 2\,704\,000,$$

причем все эти способы равновозможны. Благоприятные исходы: среди выбранных 12 человек содержат ровно 6 мальчиков. Как сформировать любой такой исход? Сначала нужно выбрать любые 6 из 12 мальчиков, а потом добавить к ним любые 6 из 12 девочек. Общее количество таких вариантов выбора можно найти по правилу умножения:

$$C_{12}^{6} \cdot C_{12}^{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 853\,800.$$

Искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{C_{12}^{6} \cdot C_{12}^{6}}{C_{24}^{18}} = \frac{3\,606\,000\,000}{9\,075\,000\,000} = 0{,}316.$$

115. Одновременно бросают 3 монеты.

а) Сколько равновозможных исходов у этого эксперимента?

б) С какой вероятностью все монеты выпадут на одну сторону?

в) С какой вероятностью выпадет хотя бы один «орел»?

116. Одновременно бросают 2 кубика.

а) Сколько равновозможных исходов у этого эксперимента?

б) Какова вероятность того, что на кубиках выпадет равное количество очков?

в) Какова вероятность, что число, выпавшее на первом кубике, больше числа, выпавшего на втором кубике?

г) Какая сумма будет выпадать чаще — 5 или 6?

д) Какое самое вероятное значение суммы выпавших очков?

117. Одновременно бросают 6 кубиков.

а) Сколько равновозможных исходов у этого эксперимента?

б) Какова вероятность того, что сумма очков на кубиках меньше 8?

118. Из коробки с двумя белыми и двумя черными шарами вынимают, не глядя, два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

119. В ящике 2 красных и 2 синих шара. Какова вероятность вынуть из него два шара одного цвета? Выберите правильный ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$. Какими неправильными рассуждениями можно получить другие два ответа?

120. Кодовой замок имеет 10 кнопок с цифрами от 0 до 9 и открывается одновременным нажатием на определенные три кнопки. Какова вероятность, что человеку, не знающему код, удастся открыть его с первого раза?

121. Замок на сейфе открывается набором определенной комбинации из 5 цифр от 0 до 9 (при этом учитывается порядок цифр в комбинации). С какой вероятностью мы откроем сейф в течение часа, если будем тратить на набор каждой новой комбинации около секунды?

122. Какова вероятность, что в компании из 12 человек все дни рождения придутся на разные месяцы года?

123. Дед Мороз и Снегурочка празднуют Новый год в компании из 10 человек (их двое да еще восемь). Какова вероятность, что их места окажутся рядом, если вся компания случайным образом садится:

а) за круглый стол; б) на диван?

124. Одновременно бросают 3 кубика. Какова вероятность того, что:

а) на всех кубиках выпадут одинаковые числа;
б) все числа на кубиках разные;
в) выпало ровно два одинаковых числа?

125. Какова вероятность того, что при игре в домино вы не получите при раздаче ни одного дубля (каждый из четырех игроков получает по 7 «доминошек»)?

126. В урне 10 шаров. Вероятность вытащить из нее два белых шара равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

127. Номера автомашин состоят из трех цифр. Найдите вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не будет содержать пятерок.

128. Ма́шина двухлетняя сестра Ира играет в кубики.

1) На трех кубиках написаны буквы А, И, Р. С какой вероятностью она может получить из них слово ИРА (т. е. первым окажется кубик с буквой И, вторым — с буквой Р, третьим — с А)?

2) С какой вероятностью она может получить из кубиков с буквами А, А, М, Ш слово МАША?

3) С какой вероятностью она может получить из кубиков с буквами А, А, М, М слово МАМА?

Б

129. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает ее наудачу. Найдите вероятность того, что ему придется набирать номер не более трех раз.

130. Некто задумал число от 1 до 10. Вы должны угадать его с трех попыток.

а) Каковы ваши шансы на успех?

б) Сколько вам нужно попыток, чтобы шансы были больше $\frac{1}{2}$?

131. Какое наименьшее число раз нужно:

а) бросить монету, чтобы вероятность появления «орла» была больше $\frac{1}{2}$;

б) бросить кубик, чтобы вероятность появления шестерки была больше $\frac{1}{2}$;

в) вытянуть карту из колоды (без возвращения), чтобы вероятность появления туза была больше $\frac{1}{2}$?

132. Среди билетов лотереи «Спринт» половина выигрышных. Сколько билетов надо купить, чтобы вероятность хоть что-то выиграть была больше 0,95?

133*. За круглый стол садятся 5 мальчиков и 5 девочек. Какова вероятность того, что никаких два мальчика и никакие две девочки не окажутся рядом, если места занимаются ими случайно?

134. Колоду из 36 карт раздают на двоих. Какова вероятность, что тузов у них окажется поровну?

135. В классе, где учится 10 мальчиков и 10 девочек, разыгрывают по жребию 10 билетов на концерт. Какова вероятность того, что на концерт пойдет поровну мальчиков и девочек?

136. Восемь футбольных команд тянут жребий, кому с кем играть в четвертьфинале. Победители этих матчей выходят в полуфиналы, а победители полуфиналов — в финал. Команда «Спартак» самая сильная, она обыгрывает любого из своих соперников. Команда «Динамо» обыгрывает любого, кроме «Спартака». Какова вероятность, что в финале встретятся «Спартак» и «Динамо»?

137*. В классе 10 мальчиков и 10 девочек. Их случайно рассадили за 10 парт. Какова вероятность того, что за каждой партой оказались мальчик и девочка?

138. В шкафу находится 5 пар ботинок различных размеров. Из них случайно выбирают 4 ботинка. Найдите вероятность того, что среди выбранных ботинок нет парных.

139. Найдите вероятность того, что случайным образом поставленные на шахматное поле:

а) две ладьи не бьют друг друга;

б)* два слона не бьют друг друга.

140. Винни-Пух и Пятачок делят пополам 10 конфет, две из которых с сюрпризом. Пусть N — число конфет с сюрпризом, доставшихся Винни-Пуху. Найдите вероятности следующих событий:

$A=\{N=0\}$; $B=\{N=1\}$; $C=\{N=2\}$.

141. Проводится серия испытаний с подбрасыванием монеты. Найдите и сравните вероятности событий:

A={после 2 испытаний число выпавших «орлов» равно числу «решек»};

B={после 3 испытаний число выпавших «орлов» равно числу «решек»};

C={после 20 испытаний число выпавших «орлов» равно числу «решек»};

Как вы думаете, как будет вести себя эта вероятность с ростом числа испытаний?

142*. Монету бросают 10 раз подряд. Какова вероятность, что «орлов» выпадет больше, чем «решек»?

143*. Монету бросают 100 раз подряд. Найдите вероятность того, что количество «орлов» нечетно. Изменится ли ответ, если монету бросают 101 раз?

9 Случайные числа и компьютер

Моделирование случайных экспериментов

В классическом определении вероятности речь идет об экспериментах с равновозможными исходами. Да и тогда не так-то просто эти исходы пересчитать. Вот почему в этом параграфе мы вернемся к частотному определению вероятности, несмотря на все его недостатки. Но на этот раз мы не будем бросать монету или тасовать колоду карт. Мы научимся **моделировать** случайный эксперимент.

Моделирование играет в современной науке важнейшую роль. Наблюдение реальных процессов зачастую не только дорого, но и просто невозможно. Именно благодаря моделированию можно правильно рассчитать траекторию космического аппарата или спланировать бюджет страны на следующий год. Правильно построенная модель позволяет изучить все особенности реального процесса и даже предсказать его поведение в будущем.

Это в полной мере касается и моделирования случайных экспериментов. Инструментами такого моделирования могут служить обыкновенная монета, кубик, рулетка — короче говоря, какой-нибудь регулярный источник случая. Удобнее всего использовать в качестве такого источника специальную таблицу — **таблицу случайных чисел**.

Чаще всего в этой таблице приводится последовательность случайных цифр от 0 до 9, которая была получена в результате многократного повторения следующего эксперимента: в ящике лежит 10 шаров с написанными на них цифрами от 0 до 9; наугад вытаскиваем один шар и записываем его номер, после чего возвращаем шар обратно в ящик.

Пример такой таблицы приведен в конце книги. Покажем, как с ее помощью можно «поставить» многие из рассмотренных выше случайных экспериментов.

Пример 1. С помощью таблицы случайных чисел проведем 50 случайных экспериментов по подбрасыванию кубика.

Для этого будем последовательно выбирать из таблицы цифры:

если это 1, 2, 3, 4, 5, 6 — будем считать это числом очков, выпавших на кубике;

если 0, 7, 8, 9 — будем эту цифру пропускать.

Таким образом, для получения 50 экспериментов нам может понадобиться больше 50 цифр (для приведенной в приложении таблицы — 77).

По результатам эксперимента получим таблицу.

Исход	Абсолютная частота	Относительная частота
1	11	0,22
2	5	0,10
3	9	0,18
4	10	0,20
5	6	0,12
6	9	0,18
	50	1

Если у вас есть компьютер, то таблицу случайных чисел может заменить **датчик случайных чисел**, которым снабжены многие программы и языки программирования. Такой датчик по вашему требованию выдает случайное число. При этом оно не обязательно лежит в диапазоне от 0 до 9, как в таблице. Чаще всего этот диапазон вы можете «заказать» датчику сами.

Компьютер может мгновенно повторить указанный эксперимент любое число раз, да еще подсчитать частоту интересующего вас события (нужно только научиться его об этом просить, т. е. писать программы).

Пример 2. Смоделируем те же 50 бросаний кубика с помощью компьютера.

Решение 1. Используем для этих целей электронную таблицу *Excel.* В этой таблице есть функция СЛЧИС(), которая дает случайное число от 0 до 1 в виде десятичной дроби. Если умножить его на 6, получим случайное число от 0 до 6. Остается взять от него целую часть и прибавить единицу — получится случайное целое число от 1 до 6:

=ОКРУГЛВНИЗ(СЛЧИС()*6;0)+1.

Для моделирования 50 бросаний кубика заполним этой формулой любые 50 ячеек электронной таблицы:

	A
1	=ОКРУГЛВНИЗ(СЛЧИС()*6;0)+1
2	=ОКРУГЛВНИЗ(СЛЧИС()*6;0)+1
...	...
50	=ОКРУГЛВНИЗ(СЛЧИС()*6;0)+1

Несмотря на одинаковую формулу, мы получим в указанных ячейках 50 случайных чисел.

	A
1	4
2	1
...	...
50	3

С помощью таблицы *Excel* можно автоматически найти абсолютную и относительную частоту каждого исхода в наших испытаниях. Это может выглядеть, например, так.

	A	B	C	D
1	4	1	=СЧЕТЕСЛИ(A1:A50;"1")	=C1/C7
2	1	2	=СЧЕТЕСЛИ(A1:A50;"2")	=C2/C7
3	...	3	=СЧЕТЕСЛИ(A1:A50;"3")	=C3/C7
4	...	4	=СЧЕТЕСЛИ(A1:A50;"4")	=C4/C7
5	...	5	=СЧЕТЕСЛИ(A1:A50;"5")	=C5/C7
6	...	6	=СЧЕТЕСЛИ(A1:A50;"6")	=C6/C7
7	...		=СУММ(C1:C6)	=СУММ(D1:D6)

В столбце *A* расположены 50 случайных чисел — результатов эксперимента, в столбце *B* — сами исходы, в столбце *C* — их абсолютные частоты, в столбце *D* — относительные.

Решение 2. В любом языке программирования есть датчик случайных чисел. Например, в языке *Turbo Pascal* эта функция называется *random*(*N*) и дает целое случайное число от 0 до $N - 1$. Значит, для получения искомой последовательности достаточно написать программу, которая 50 раз вызовет функцию *random*(6)+1:

```
program Cube;
    const N=50; {Количество испытаний}
    var i,r:integer;
        F:array[1..6] of integer; {Массив абсолютных частот}
begin
    for i:=1 to N do
    begin
        r:=random(6)+1; {Получение очередного исхода}
        write(r);
        inc(F[r]); {Подсчет частоты}
    end;
    writeln;
    for i:=1 to 6 do
        writeln(i:2,F[i]:6,F[i]/N:8:3)
end.
```

Программа выдаст на экран исходы 50 бросаний:

11622521331316126352565212325231625636511141415455

и посчитает абсолютную и относительную частоту каждого исхода:

1	13	0,260
2	10	0,200
3	7	0,140
4	3	0,060
5	10	0,200
6	7	0,140

Интересно, что при повторном запуске эта программа выдаст ту же последовательность случайных исходов, чего никогда не бывает с настоящим кубиком. От этого недостатка легко избавиться, если провести в самом начале программы так называемую «рандомизацию» датчика случайных чисел — вызвать процедуру *randomize*. Теперь каждый новый запуск нашей программы будет давать новую последовательность исходов.

Не всякий случайный эксперимент состоит в получении одного случайного числа, как мы делали это при подбрасывании кубика. В многоэтапном эксперименте таких случайных чисел может быть несколько. К тому же они могут быть каким-то образом связаны друг с другом, например, все должны быть различны. Такие эксперименты моделировать, конечно, сложнее.

Пример 3. Рассмотрим задачу, неоднократно встречавшуюся нам ранее: три человека пришли в ресторан в одинаковых шляпах, сдали их в гардероб, а уходя, надели их наугад. Найдите вероятность события *B={все надели чужие шляпы}* с помощью статистического эксперимента.

Попробуем смоделировать ситуацию с помощью компьютера. Для этого нам необходимо разыграть, какую шляпу надел первый господин, какую — второй и какую — третий. Все шляпы занумеруем. Нам нужно получить три случайных числа от 1 до 3, причем все они должны быть различны (ведь в одной шляпе не могут уйти сразу двое!). Такая тройка называется *случайной перестановкой.*

Если нам удастся смоделировать такую случайную перестановку, то, повторив ее многократно, мы сможем оценить вероятность события *B* по его частоте. Вот так будет выглядеть программа на Паскале:

```
program Hats;
   const k=3; {Количество человек}
   var N,i,F:longint;
      j,r,x,Count:integer;
      H:array[1..k] of integer;
begin
   randomize;
   {Задаем число испытаний}
   write('N=');readln(N);
   F:=0;
   for i:=1 to N do
   begin
      {Генерация случайной перестановки из k чисел}
      for j:=1 to k do H[j]:=j;
      for j:=k downto 1 do
      begin
         r:=random(j)+1;
         x:=H[j];H[j]:=H[r];H[r]:=x;
      end;
      {Сколько шляп надето на свои головы?}
      Count:=0;
      for j:=1 to k do if H[j]=j then inc(Count);
      {Подсчет частоты}
      if Count=0 then inc(F);
   end;
   writeln(F/N:7:5);
end.
```

А вот ее результаты при возрастающих значениях *N*:

N	Относительная частота
10	0,20000
100	0,29000
1000	0,35100
10000	0,34000
100000	0,33316

Заметьте, что компьютер дал возможность почти мгновенно провести 100 000 экспериментов! Разумеется, проделать то же самое с реальными шляпами невозможно: даже если тратить на один эксперимент всего секунду, то понадобится около 27 часов непрерывных надеваний и снятий шляп...

По таблице несложно догадаться, что частота события B приближается к $\frac{1}{3}$. Еще одно достоинство этой программы (и компьютерного моделирования вообще): мы можем моделировать более общую ситуацию для произвольного количества людей, для этого достаточно изменить значение константы k (обязательно попробуйте!).

144. Вам необходимо провести 100 случайных экспериментов по подбрасыванию монеты. Опишите, как это можно сделать, если в вашем распоряжении:

а) только кубик; б) только колода карт.

145. Винни-Пух и Пятачок всегда решали, к кому идти в гости с помощью вертушки, изображенной на рисунке 22. Если стрелка останавливалась на белом поле, то они шли в гости к Пятачку, если на синем — к Винни-Пуху. При очередном жребии вертушка сломалась. Как им бросить точно такой же жребий:

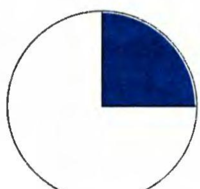


Рис. 22

а) с помощью двух одинаковых монет;

б) с помощью одной монеты?

146. Каким образом с помощью таблицы случайных чисел можно случайным образом выбрать одного из:

а) 100 человек; б) 80 человек; в) 120 человек?

147. Используя компьютер, повторите опыт Пирсона по подбрасыванию монеты. Сравните результаты Пирсона со своими. У кого относительная частота исходов получилась ближе к $\frac{1}{2}$: у вас или у Пирсона?

148. Продолжите серию опытов, начатую в примере 1, и доведите ее до 100 испытаний (напомним, что начинать нужно с 78-й цифры таблицы случайных чисел, так как первые 77 цифр уже использованы).

а) Сколько всего цифр вы использовали? Оцените количество цифр, которое понадобится для проведения 1000 таких опытов.

б) Найдите относительную частоту каждого из шести исходов. Сравните отклонения частот от $\frac{1}{6}$ после 50 и после 100 испытаний. Что с ними произошло?

149. Объедините результаты 50 опытов примера 1 и 50 опытов примера 2. По этим данным найдите относительную частоту каждого из шести исходов. Сравните получившиеся у вас отклонения частот от вероятностей с отклонениями в примерах 1 и 2. Что с ними произошло?

150. Измените программу, приведенную в примере 3, так, чтобы с ее помощью можно было оценить вероятности следующих событий:

A={каждый надел свою шляпу};
B={все надели чужие шляпы};
C={двое надели чужие шляпы, а один — свою};
D={двое надели свои шляпы, а один — чужую}.

151. Двое по очереди бросают монету, причем выигрывает тот, у кого раньше выпадет «орел». Оцените вероятность выигрыша для первого и второго игроков. Для этого проведите необходимое, на ваш взгляд, количество случайных экспериментов с помощью:

а) таблицы случайных чисел; б) компьютера.

152. Случайный эксперимент состоит в измерении температуры у заболевшего мальчика. Можно ли смоделировать этот эксперимент с помощью таблицы случайных чисел так: выбираем из нее три цифры подряд и составляем из них температуру? Например, если выбраны цифры 3, 8, 2, то температура будет 38,2 °С.

153. Случайный эксперимент состоит в покупке двухсотграммовой пачки чая и взвешивании ее на лабораторных весах с точностью до 1 миллиграмма. У нас нет ни пачки чая, ни весов, и мы хотим смоделировать этот эксперимент с помощью кубика: бросить его 6 раз подряд и составить из шести выпавших цифр вес пачки. Например, если выпали цифры 2, 3, 4, 1, 3, 2, то вес будет 234,132 грамма. Правильно ли это?

154. Стержень случайным образом ломают на три части. Какова вероятность, что из этих обломков можно составить треугольник? Ответ найдите через случайное моделирование с помощью:

а) таблицы случайных чисел; б) компьютера.

Б

155. Вам нужно провести эксперимент по вытягиванию наугад одной карты из колоды, в которой отсутствуют шестерки (в такой колоде 32 карты). Карт у вас нет, но есть монета. Придумайте, как с ее помощью провести этот эксперимент.

156. В автобусе, которому предстоит сделать 10 остановок, едет 8 пассажиров. Каждый из них может с равными шансами выйти на любой из остановок. Смоделируйте серию рейсов такого автобуса с помощью:

а) таблицы случайных чисел; б) компьютера.

По результатам моделирования оцените вероятности событий:

A={все пассажиры выйдут на разных остановках};
B={все пассажиры выйдут на одной остановке};
C={на 5-й остановке кто-нибудь выйдет};
D={на 5-й остановке никто не выйдет};
E={на 1-й остановке кто-нибудь выйдет}.

157. Из коробки, в которой 2 красных, 2 желтых и 2 зеленых шара, наугад достают два шара. Смоделируйте серию таких испытаний с помощью:

а) таблицы случайных чисел;

б) компьютера.

По результатам испытаний заполните таблицу.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
2к		
2ж		
2з		
1к1ж		
1к1з		
1ж1з		

Сравните результаты, полученные вами, с результатами из таблицы, полученной в задаче № 99 из § 7.

158. Бросают три кубика — белый, черный и красный. Пусть S — это сумма очков на белом и черном кубиках, а M — сумма двух наибольших очков. Например, если на белом кубике выпало 4 очка, на черном — 1 очко, на красном — 3 очка, то

$$S = 4 + 1 = 5, \quad M = 4 + 3 = 7.$$

Проведите серию таких испытаний с помощью:

а) таблицы случайных чисел; б) компьютера.

По полученным данным оцените и сравните вероятности событий:

$P\{S=2\}$ и $P\{M=2\}$; $P\{S=3\}$ и $P\{M=3\}$; ... $P\{S=12\}$ и $P\{M=12\}$.

Замечание: вероятность каждого из значений суммы S мы уже вычисляли раньше.

159. 1) Ольга, Маша и Ирина каждый день тянут жребий — кому из них сегодня мыть посуду. Для этого они кладут в шляпку три бумажки, одна из которых помечена крестиком, а потом по очереди их вытаскивают:

Ольга — первой, Маша — второй, а Ирина — третьей. Справедливый ли это жребий? Для ответа на вопрос проведите серию случайных экспериментов на компьютере.

2) Ольга предложила изменить жребий так: каждая из них по очереди бросает монету: у кого первым выпадет «орел», тому и мыть посуду. Очередность бросаний она предлагает оставить ту же. Соглашаться ли ее сестрам на это предложение? Ответ подтвердите серией случайных экспериментов с помощью компьютера.

160. «Любовь с первого взгляда». В игре участвуют трое юношей и три девушки. Каждый юноша выбирает одну из девушек, а каждая девушка — одного из юношей. Если юноша и девушка выбрали друг друга, то образуется пара. Какое количество образовавшихся пар наиболее вероятно? Ответ найдите с помощью компьютера.

161. Из 100 килограммов стекла делают 100 бутылок. В массе стекла 100 камешков. Какова вероятность того, что в случайно выбранной бутылке:

а) не будет камешков;

б) будет ровно один камешек;

в) будет два и более камешков?

Ответ найдите с помощью таблицы случайных чисел или компьютера.

162. С помощью компьютера найдите относительную частоту появления каждой из 33 букв русского алфавита в каком-нибудь русскоязычном текстовом файле. По полученным данным оцените вероятность события:

A={случайно выбранная из текста буква является гласной}.

Можно ли вычислить эту вероятность по формуле $P(A) = \frac{10}{33}$? Вероятность какого события будет равна этой дроби?

163. С помощью компьютера оцените, с какой частотой в русском языке используются слова длиной в 1, 2, 3 и т. д. букв. Для этого, как и в предыдущей задаче, проанализируйте какой-нибудь достаточно длинный русскоязычный текстовый файл.

10 Точка тоже бывает случайной

Геометрическое определение вероятности

Равновозможность исходов случайного эксперимента позволяет вычислять вероятность любого связанного с ним события без обращения к частоте. Такая ситуация возникает в некоторых геометрических задачах, связанных со случайным выбором точки на прямой, плоскости или в пространстве.

Выберем на географической карте мира, изображенной на рисунке 23, случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем в нее указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России? Очевидно, для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей карты занимает Россия. Точнее, какую часть всей площади карты составляет площадь России. Отношение этих площадей и даст искомую вероятность.

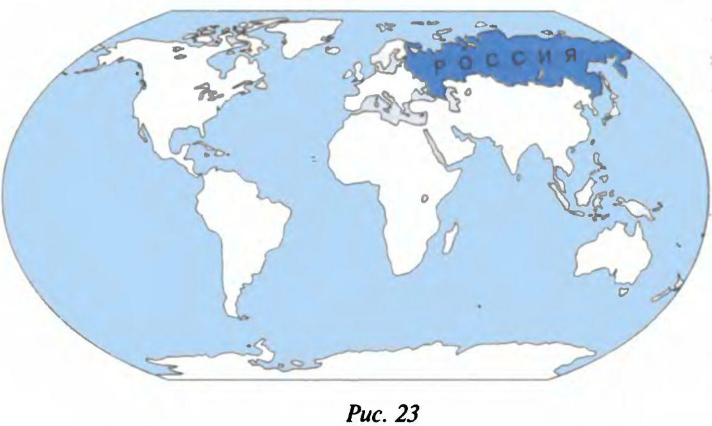


Рис. 23

А какова вероятность попасть при этом в Гринвичский меридиан? Как ни странно, придется положить ее равной нулю — ведь площадь меридиана равна нулю (это ведь линия, а не фигура: у нее есть только длина). На самом деле ничего странного в этом факте нет — попасть указкой точно в меридиан невозможно.

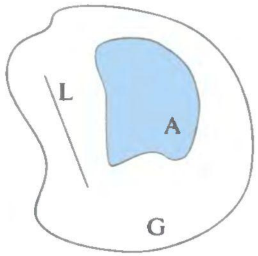


Рис. 24

Такую же картину мы имеем и в общем случае, когда в некоторой области G (рис. 24) случайно выбирается точка. Если предположить, что попадание в любую точку области ***равновозможно,*** то вероятность попадания случайной точки в любую подобласть A будет равна отношению площадей

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(G)}$$

(через P мы, как и раньше, обозначаем вероятность, а через S — площадь).

Если A имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в A равна нулю. Например, вероятность попадания на отрезок L будет нулевой.

Такое определение вероятности называется **геометрическим.**

Ситуация напоминает классическое определение вероятности: как и там, здесь важна равновозможность всех исходов, т. е. всех точек области. Но теперь число исходов эксперимента бесконечно, поэтому приходится считать не их количество, а занимаемую ими площадь[1].

Точно так же можно определить геометрическую вероятность в пространстве (вместо площадей здесь надо брать объемы тел) и на прямой (а здесь — длины отрезков).

---

[1] Надо отметить, что равновозможность исходов в геометрической вероятности – дело совсем непростое. Достаточно познакомиться с классическим парадоксом Бертрана, описание которого вы можете найти в литературе.

Пример 1. С какой вероятностью стрелка вертушки, изображенной на рисунке 25, остановится на черном секторе?

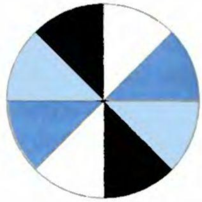


Рис. 25

Для ответа на этот вопрос можно:

1) вычислить площадь черных секторов и разделить ее на площадь всего круга, или

2) найти суммарную длину дуг, ограничивающих черные секторы, и поделить ее на длину всей окружности.

Способ 2 лучше отражает суть нашего эксперимента, ведь фактически мы выбираем точку на окружности, в которой остановится острие стрелки. Напомним, что длина дуги находится по формуле

$$L = \alpha R,$$

где α — центральный угол дуги, выраженный в радианах. Отсюда искомая вероятность будет

$$P = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot R}{2\pi R} = \frac{1}{4}.$$

Заметим, что тот же результат можно было получить и без привлечения геометрической вероятности, ведь вертушка поделена на 8 равных (а значит, равновозможных!) секторов, из которых 2 выкрашены в черный цвет. Отсюда

$$P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Теперь рассмотрим примеры, в которых геометрическое определение вероятности дает единственно возможный способ решения.

Пример 2. В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

Изобразим квадрат со стороной 4 см и закрасим в нем множество точек, удаленных от ближайшей стороны квадрата меньше, чем на 1 см (рис. 26). Площадь закрашенной части квадрата составляет 16 см^2 — 4 см^2 = 12 см^2. Отсюда искомая вероятность будет

$$P = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

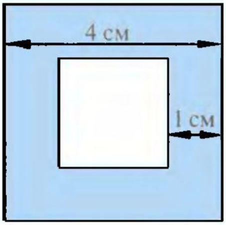


Рис. 26

Пример 3. Коля и Оля договорились встретиться в Центральном парке с 12.00 до 13.00. Пришедший первым ждет другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность, что они встретятся?

На первый взгляд в этой задаче геометрическая вероятность вообще ни при чем. Но не будем торопиться с выводами.

Обозначим время прихода в парк Коли через x, а Оли — через y (для удобства будем выражать время в минутах, прошедших после 12 часов). Тогда точка с координатами (x, y) будет случайной точкой в квадрате на плоскости Oxy, изображенном на рисунке 27.

Каждая точка этого квадрата — это один из возможных исходов нашего эксперимента. Эксперимент завершается встречей, если выполняется условие $|x - y| < 30$. Множество таких точек закрашено на рисунке 28.

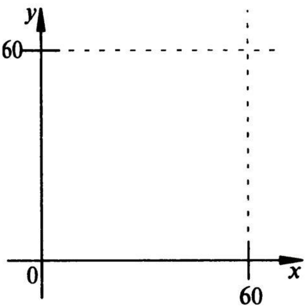


Рис. 27

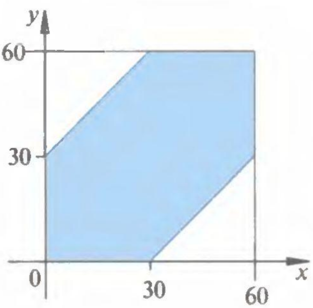


Рис. 28

Площадь закрашенной части можно найти, вычитая из площади квадрата площади двух равных треугольников:

$$S = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 3600 - 900 = 2700.$$

Искомую вероятность встречи находим как отношение «благоприятной» площади ко всей площади квадрата:

$$P = \frac{2700}{3600} = \frac{3}{4}.$$

A

164. На шахматной доске случайным образом выбирают точку. Какова вероятность, что она попадет:

а) на белую клетку;

б) на черную клетку;

в) на границу черной и белой клеток?

165. Малыш наугад показывает пальцем точку на глобусе. Какова вероятность, что он попадет:

а) в Россию;

б) в Тихий океан;

в) в Восточное полушарие?

166. Реклама на канале «МММ» занимает около 20% времени телевизионных трансляций. Какова вероятность, что, переключив телевизор на этот канал, вы попадете на рекламу?

167. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Ремонтная бригада, обслуживающая этот участок, располагается на 50-м километре. В какую сторону ей лучше выезжать? С какой вероятностью ваш совет окажется правильным?

168. На шахматную доску со стороной клетки 5 см бросают монету радиусом 1 см. Какова вероятность, что монета целиком окажется внутри:

а) какой-то клетки; б) белой клетки?

169. На шахматную доску со стороной клетки 5 см бросили монету радиусом 1 см. Она закрыла белую площадь A и черную площадь B. Какова вероятность, что:

а) A больше B;
б) B больше A;
в) A равно B?

170. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20 см. Какова вероятность того, что попавший в окно мяч пролетит через решетку, не задев ее, если радиус мяча равен:

а) 10 см; б) 5 см?

171. Найдите вероятность того, что для двух чисел, наудачу взятых из отрезка $[-1, 1]$:

а) их сумма положительна;
б) их произведение отрицательно;
в) их сумма положительна, а произведение отрицательно.

172. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение суток. Найдите вероятность того, что ни одному из них не придется ждать освобождения причала, если время разгрузки каждого парохода 1 час.

173. На окружности радиуса R наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше R?

174. Перед тем как ставить пирог в печку, в него воткнули 4 ореха так, как показано на рисунке 29. После того как пирог испекли, его поделили на три равные части, одна из которых досталась вам. Какова вероятность того, что в вашей части:

а) нет орехов;
б) один орех;
в) два ореха?

Рис. 29

Б

175. Четыре ореха (см. задачу 174) бросили прямо в тесто и все хорошенько перемешали. После выпечки пирог снова разрезали на три равные части и одну дали вам. Какова вероятность того, что в вашей части:

а) нет орехов; б) один орех; в) два ореха;
г) три ореха; д) четыре ореха?

Указание: считается, что сначала пирог режут на три части, а потом выбирают 4 случайные точки для размещения орехов.

176. Из отрезка [0; 1] наудачу выбирают три числа a, b, c. Какова вероятность, что $a < b < c$?

177*. В квадрат «брошена» точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем до ближайшей диагонали.

178*. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, брошена монета радиусом r. Какова вероятность того, что монета не заденет границы ни одного из треугольников?

179*. Центр окружности радиусом 5 находится в точке с координатами (6, 8). Какова вероятность того, что:

а) случайная прямая, проходящая через начало координат, пересечет данную окружность;

б) случайный луч, выпущенный из начала координат, пересечет данную окружность?

180. Через станцию метро поезда следуют в двух направлениях — в каждом направлении с интервалом ровно 5 минут. В одном направлении у Феди живет бабушка, а в другом — дедушка. Федя приходит на станцию после школы и садится на тот поезд, который подойдет первым. При этом оказывается, что у бабушки он бывает приблизительно в 4 раза чаще, чем у дедушки. При каких условиях это может произойти?

181. Два друга живут в одном доме, а учатся в разных классах. Уроки в школе заканчиваются в интервале от 16 до 17 часов. После занятий они договариваются ждать друг друга на автобусной остановке в течение 20 минут. Сколько приблизительно раз за год им удастся поехать домой вместе, если в году 200 учебных дней?

182*. Расстояние от остановки «Стадион» до остановки «Школа» автобус проходит за 2 минуты, а Андрей — за 15 минут. Интервал движения автобусов — 25 минут. В случайный момент времени Андрей выходит со стадиона, опаздывая в школу. Что ему лучше делать — идти пешком или подождать автобус?

183*. Стержень случайным образом ломают на три части. Какова вероятность того, что из них можно составить треугольник?

11 Вероятностное пространство*

Аксиоматическое определение вероятности

Мы знаем уже три определения вероятности случайного события A:

• **статистическое:** вероятность приближенно равна частоте появления события A в длинной серии экспериментов (см. § 5);

• **классическое:** вероятность — это отношение числа благоприятных для события A исходов к числу всех исходов эксперимента (см. § 6);

• **геометрическое:** вероятность — это отношение площади события A ко всей площади области, где случайно выбирается точка (см. § 10).

При этом только два последних определения по-настоящему математические — они позволяют точно определить вероятность в рамках математической модели, не обращаясь к опыту. В свою очередь, частотное определение наполняет классическое и геометрическое определения реальным смыслом: именно к указанным в них априорным величинам будет стремиться частота в статистических экспериментах (если, конечно, выбранная модель соответствует реальной ситуации).

В этом параграфе мы попробуем обобщить математическое определение вероятности, объединив классическое и геометрическое определения и расширив рамки нашей математической модели реальных явлений. Это определение называют **аксиоматическим** и связывают с именем одного из величайших математиков XX столетия — Андрея Николаевича Колмогорова.

Пусть Ω[1] — множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента. Будем считать, что множество Ω конечно, и обозначать его элементы (т. е. исходы эксперимента) $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}.$$

Зададим на элементах множества Ω неотрицательную числовую функцию $p(\omega)$, для которой

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_n) = 1.$$

Эту функцию будем называть **распределением вероятности** на Ω, а пару (Ω, p) — **вероятностным пространством**.

Случайным событием A назовем любое подмножество элементов из множества ω, а его **вероятностью** $P(A)$ — сумму вероятностей входящих в него исходов. В частности, вероятностью элементарного события $\{\omega\}$ будет сопоставленное ему число $p(\omega)$.

Пример 1. В опыте с бросанием монеты множество Ω состоит из двух исходов, причем их вероятности равны.

ω	«Орел»	«Решка»
$p(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Пример 2. В опыте с бросанием кнопки множество Ω также содержит всего два исхода, но они уже неравновероятны.

ω	Острие вверх	Острие вниз
$p(\omega)$	0,56	0,44

[1] Ω — греческая буква омега, точнее омега прописная, ω — омега строчная. В теории вероятностей традиционно очень популярен греческий алфавит.

В примере 1 мы выбрали распределение вероятности, исходя из симметрии монеты и равновозможности исходов. В примере 2 никакой симметрии уже нет, и единственное, что можно использовать при выборе распределения вероятности, — это полученные ранее частоты этих исходов.

Пример 3. Опыт с бросанием двух кубиков мы описывали двумя разными вероятностными моделями.

Модель 1. Исходы — все возможные пары чисел, которые могут выпасть на кубиках:

ω	11	12	13	...	66
$p(\omega)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	...	$\frac{1}{36}$

Таких исходов 36, и все они равновозможны.

Модель 2. Исходы — все возможные суммы очков, которые могут выпасть на кубиках.

ω	2	3	4	...	12
$p(\omega)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	...	$\frac{1}{36}$

Таких исходов только 11, и вероятности их различны. Заметим, что каждый из этих 11 исходов выражается через приведенные выше равновероятные, которые с этой точки зрения оказываются «более элементарными».

Рассмотренные примеры позволяют заключить следующее. Чтобы построить вероятностное пространство, нужно прежде всего описать множество исходов Ω. Затем нужно определить вероятности всех исходов. Здесь можно выделить три основных способа вычисления этих вероятностей.

1-й способ. Если нет оснований предполагать противное, все исходы считают равновозможными и их вероятности полагаются равными $\frac{1}{n}$, где n — число исходов.

2-й способ. Если есть основания предполагать, что исходы неравновозможны, нужно попытаться разбить их на более мелкие, равновозможные. Если в эксперименте есть какая-то симметрия, то это обычно удается. После этого их вероятности выражаются через вероятности равновозможных исходов.

3-й способ. Если случайный эксперимент не содержит никакой симметрии, то вероятности всех исходов оценивают приближенно по их частоте.

В математике изучаются и более сложные вероятностные пространства, содержащие бесконечные множества исходов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\},$$

но при этом все равно требуется, чтобы

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots = 1.$$

(примером такой бесконечной суммы может служить сумма членов геометрической прогрессии, знаменатель которой по модулю меньше 1).

Вероятностью случайного события A в таком пространстве по-прежнему будет сумма вероятностей входящих в него исходов, но теперь такая сумма может содержать уже бесконечное число слагаемых (хотя ее значение все равно остается меньше или равно 1).

Пример 4. Бросаем монету до первого появления «орла». Множество всех возможных исходов будет бесконечно:

$$\Omega = \{\text{О, РО, РРО, РРРО, РРРРО, } \ldots\}.$$

Вероятности этих исходов будут соответственно

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots .$$

Легко сообразить, что они образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$, сумма которой равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

Наконец, пространство Ω может содержать настолько большое количество исходов, что их нельзя даже перенумеровать (например, нельзя перенумеровать точки на отрезке вещественной прямой), а значит, и нельзя составить из них сумму.

Тогда вероятность каждого отдельного исхода приходится считать равной нулю, а вероятность случайного события вычислять как длину, площадь, объем (математики говорят — **меру**) всех входящих в это событие исходов. С примером такого вероятностного пространства мы сталкивались при изучении геометрической вероятности.

184. Одновременно бросают три монеты. Найдите распределение вероятностей для каждой системы исходов:

1-я система

ω	ООО	OOP	ОРО	POO	OPP	POP	PPO	PPP
$p(\omega)$								

2-я система

ω	3 «орла»	2 «орла», 1 «решка»	1 «орел», 2 «решки»	3 «решки»
$p(\omega)$				

В какой из систем исходы равновозможны?

Придумайте любое случайное событие, связанное с описанным экспериментом, и найдите его вероятность.

185. Из урны, в которой 2 красных и 2 желтых шара, извлекают наугад два шара. Найдите распределение вероятностей для каждой системы исходов.

1-я система

ω	КК	КЖ	ЖК	ЖЖ
p(ω)				

2-я система

ω	2 красных	1 красный, 1 желтый	2 желтых
p(ω)			

Постройте свою систему, в которой все исходы равновозможны.

Придумайте любое случайное событие, связанное с описанным экспериментом, и найдите его вероятность.

186. В семье трое детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, опишите множество всех возможных исходов и распределение вероятностей на этом множестве. Найдите вероятность того, что в семье:

а) все дети мальчики;

б) все дети одного пола;

в) есть хотя бы один мальчик.

187. Студент пришел на экзамен, зная 20 вопросов из 25. В билете 2 вопроса. Найдите распределение вероятностей для каждой системы исходов. В какой из систем исходы равновозможны?

1-я система: обозначим выученный вопрос «В», невыученный — «Н»;

ω	ВВ	ВН	НВ	НН
p(ω)				

2-я система: пронумеруем все вопросы и будем считать, что студент выучил с 1-го по 20-й вопросы.

ω	1, 2	1, 3	...	1, 25	2, 1	2, 3	...	25. 24
$p(\omega)$								

188. Пользуясь любой системой исходов из задачи 187, найдите вероятности следующих событий:

A={студент знает оба вопроса в билете};
B={знает ровно один вопрос};
C={знает хотя бы один вопрос};
D={не знает ни одного из двух вопросов}.

В задачах 189—202, прежде чем находить вероятность событий, постройте пространство всех возможных исходов и распределение вероятностей на этом пространстве.

189. 1) На карточках написаны буквы А, Е, К, Р. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить слово РЕКА (т. е. первой окажется буква Р, второй — Е, третьей — К и четвертой — А)?

2) На карточках написаны буквы А, А, М, М. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить слово МАМА?

3) На карточках написаны буквы М, М, М, У. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить слово ММMУ?

4) На карточках написаны буквы М, М, М, М. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить слово ММММ?

190. 1) Из 7 карточек ПРСТУФХ наудачу выбираются три и в случайном порядке раскладываются в ряд. Найдите вероятность того, что получится слово ПУХ.

2) Из 7 карточек ПРСТУФХ наудачу выбираются три и по алфавиту раскладываются в ряд. Найдите вероятность того, что получится слово ПУХ.

191. Три метких (т. е. никогда не промахивающихся) охотника одновременно стреляют по трем вальдшнепам. Какова вероятность того, что хотя бы один вальдшнеп уцелеет, если каждый охотник выбирает себе цель наугад?

192. Среди 25 экзаменационных билетов 20 «хороших» и 5 «плохих». Экзамен сдают 25 учеников. Определите вероятность, что «плохой» билет вытащит:

а) первый ученик; б) второй ученик.

Как вы думаете, какой эта вероятность будет для остальных?

193. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад вынули два шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

194. Два друга бросают жребий, кому первому нырять с вышки. Для этого каждый из них должен случайно «выбросить» на одной руке любое количество пальцев от 1 до 5. Затем оба числа складываются и ведется счет — на кого выпадет, тот и будет прыгать. Перед жребием они заспорили, с кого начинать счет. Имеет ли это значение?

195*. 1) В вашем распоряжении есть три необычных кубика, развертки которых показаны на рисунке 30. Ваш соперник предлагает вам первому выбрать любой из них. После этого он берет себе один из оставшихся, и вы начинаете играть. Выигрывает тот, у кого на кубике выпало больше очков. Какой кубик вы выберете?

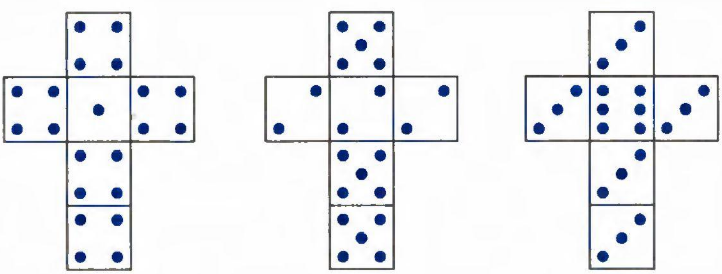


Рис. 30

2) С теми же кубиками играть будут трое. Вы опять выбираете первым. На каком кубике вы остановите свой выбор на этот раз?

196*. Спортсмен-биатлонист должен поразить 3 мишени пятью выстрелами. Каждый выстрел попадает в цель с вероятностью $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что биатлонист не побежит штрафные круги (т. е. поразит все мишени)?

197*. 1) Два игрока договорились подбрасывать монету и записывать исходы бросаний: О — «орел», Р — «решка». Как только в этой последовательности встретится ОО или ОР, игра заканчивается, причем если она закончилась на ОО, выигрывает первый игрок, а если на ОР — второй.

Например:

РРРРРРРОР — выиграл второй,
РРОО — выиграл первый,
РРРРР — игра еще не закончена, надо бросать дальше.

Кто из них будет чаще выигрывать?

2)* Второй игрок предложил изменить правила: теперь он будет выигрывать, как только встретится РО, а не ОР. Первый игрок сразу согласился — ведь монета симметричная. Не погорячился ли он?

198. Вы купили в магазине три магнитофонные кассеты. На одной записана с двух сторон музыка Баха, на другой — с двух сторон музыка Моцарта, а на третьей — с одной стороны Бах, а с другой Моцарт. Придя вечером домой, вы не стали включать свет, а сразу поставили одну из кассет. Зазвучал Бах. Какова вероятность того, что на обратной стороне также записана его музыка?

199. В коробке лежат три диска, раскрашенных в красный и синий цвета. При этом на одном диске обе стороны красные, на другом — обе синие, а на третьем — одна сторона красная, а другая синяя. Из коробки достают диск и показывают одну из сторон. Вам нужно угадать цвет обратной стороны. Как вы будете действовать?

Рассмотрите следующие стратегии:

а) называть всегда синий цвет;

б) называть всегда красный цвет;

в) называть попеременно то красный, то синий;

г) называть цвет случайно, с помощью монеты;

д) называть тот цвет, который видим;

е) называть красный цвет, если видим синий, и наоборот.

Найдите для каждой из стратегий вероятность угадывания.

200*. Из 100 килограммов стекла делают 100 бутылок. В массе стекла 100 камешков. Какова вероятность, что в случайно выбранной бутылке:

а) не будет камешков;

б) будет ровно один камешек;

в) будет два и более камешков?

Указание: размерами камешков пренебречь.

201. В урне N шаров, из которых M белых. Из урны вынули K шаров без возвращения. Какова вероятность, что при этом в урне не осталось белых шаров?

202*. В игре «Любовь с первого взгляда» трое юношей и три девушки выбирают друг друга. Если выбор юноши и девушки совпал, то образуется пара. Постройте вероятностное пространство и найдите вероятности следующих событий:

A={не образовалось ни одной пары};

B={образовалась одна пара};

C={образовалось две пары};

D={образовалось три пары}.

12 Сколько изюма в булке и сколько рыб в пруду?

Статистическое оценивание и прогноз

В заключение еще раз поговорим о том, какую практическую пользу можно извлечь из подсчета вероятностей. Точнее, вы научитесь решать три важнейших типа статистических задач:

- оценивать частоту по известной вероятности;
- предсказывать наиболее вероятный исход данного опыта;
- проверять статистические гипотезы.

Вы знаете, что с ростом числа экспериментов частота стремится к вероятности. Значит, *по известной вероятности можно* **прогнозировать** *частоту* повторения интересующего нас события в будущем. При этом вероятность может быть найдена любым из известных нам способов (в том числе оценена по уже имеющейся частоте).

Пример 1. При проведении контроля качества среди 1000 случайно отобранных деталей оказалось 5 бракованных. Сколько бракованных деталей следует ожидать среди 25 000 деталей?

По результатам контроля можно оценить вероятность события A=*{произведенная деталь бракованная}*. Приближенно она будет равна его частоте:

$$P(A) \approx \frac{5}{1000} = 0{,}005.$$

Следует ожидать такую частоту и в будущем, поэтому среди 25 000 деталей окажется около $25\,000 \cdot 0{,}005 = 125$ бракованных.

Пример 2. Население города Калуги составляет около 400 000 жителей. Сколько калужан родились 29 февраля?

Заметим прежде всего, что вопрос задачи не совсем корректен: мы можем ответить на него лишь приближенно, ибо реальная частота даже в такой большой выборке из 400 000 жителей не обязана совпадать с вероятностью.

29 февраля бывает только в високосном году — один раз в четыре года, следовательно, для случайно выбранного человека его день рождения попадает на 29 февраля с вероятностью

$$\frac{1}{3 \cdot 365 + 366} = \frac{1}{1461} = 0{,}00068.$$

Это значит, что среди 400 000 жителей Калуги следует ожидать около

$$400\,000 \cdot \frac{1}{1461} \approx 274 \text{ человек},$$

которым приходится праздновать свой день рождения раз в четыре года.

На прогнозировании частоты основан один интересный способ определения численности популяций, используемый в биологии.

Пример 3. Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов — на этот раз поймали 78 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Сколько приблизительно рыб живет в озере?

Оказывается, найти ответ на этот неожиданный вопрос совсем несложно. В самом деле: обозначим неизвестную нам численность рыб в озере через N. Тогда вероятность поймать помеченную рыбу в озере будет $\frac{86}{N}$.

С другой стороны, эта вероятность должна приближенно равняться полученной во втором улове частоте:

$$\frac{86}{N} \approx \frac{6}{78}.$$

Отсюда $N \approx \frac{86 \cdot 78}{6} = 1118$.

Сравнивая вероятности всех возможных исходов эксперимента, можно предсказывать, каким из них эксперимент закончится *скорее всего*. Обратите внимание, что мы говорим «скорее всего», а не «наверняка» — ведь любой статистический прогноз может оказаться ошибочным.

Пример 4. Какая сумма, скорее всего, выпадет при бросании двух кубиков?

Поскольку мы уже считали вероятности всех возможных исходов в таком эксперименте, то знаем, что максимальную вероятность имеет сумма 7, а ее вероятность составляет $\frac{1}{6}$. Разумеется, сама по себе эта вероятность не слишком велика, и ожидать, что при первом же бросании выпадет сумма 7, вряд ли стоит. Тем не менее из всех возможных сумм она наиболее вероятная.

Если в основу вычисления вероятности была положена некоторая **гипотеза**, а полученные в реальном эксперименте частоты с ней явно расходятся, то *есть повод усомниться в этой гипотезе.*

Пример 5. В 10 бросаниях монеты вы получили 9 «орлов». Следует ли считать монету правильной?

Если бы монета была правильной (это и есть та гипотеза, в которой мы усомнились), то получить 9 или 10 «орлов» в 10 бросаниях можно было бы с вероятностью

$$P = \frac{10 + 1}{2^{10}} \approx 0{,}01.$$

Значит, в результате опыта произошло очень редкое, **маловероятное**[1] событие.

---

[1] Какие события считать маловероятными, во многом зависит от договоренности. Мы будем считать маловероятными события, вероятность которых не превышает 0,01.

В то же время, если предположить, что монета неправильная и вероятность выпадения «орла» на ней больше $\frac{1}{2}$, то произошедшее событие уже не будет таким невероятным. Это дает нам все основания считать, что монета несимметричная.

В большинстве приводимых ниже задач вам придется отвечать на некорректные вопросы типа «Сколько изюма в булке?» или «Сколько рыб в пруду?». Помните, что во всех задачах речь идет лишь о вероятностной оценке неизвестной величины, но сделать ее нужно наилучшим образом.

А

203. В коробке 100 шаров белого и черного цвета. Из нее 60 раз вынули шар, возвращая его каждый раз обратно. При этом белый шар появился в 18 случаях. Сколько белых шаров в коробке?

204. Включая в течение месяца телевизор около 150 раз, Вова в 30 случаях попадал на рекламу. Какой процент от времени телевизионных трансляций занимает реклама?

205. В Москве около 10 млн жителей. Сколько жителей Москвы празднуют свой день рождения 1 января?

206. Воспользовавшись календарем, посчитайте, какому проценту российских школьников в этом году не нужно идти в школу в свой день рождения.

207. Среднестатистический житель России ежедневно проводит у телевизора около двух с половиной часов. Можно ли по этим данным оценить, сколько часов вы проведете у телевизора в ближайший месяц?

208. Будем считать вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми. Ответьте на следующие некорректные вопросы, подразумевая, что в них добавлена фраза «скорее всего».

а) В семье два ребенка. Какого они пола?

б) В семье три ребенка. Сколько из них имеет одинаковый пол?

в) В семье четыре ребенка. Сколько из них мальчиков?

209. Средняя частота попадания в мишень в тире — 0,6. За день около 100 пуль улетели «в молоко». Сколько всего выстрелов было сделано?

210. На шахматную доску 100 раз бросили монету радиусом 1 см. В 64 случаях монета целиком оказывалась внутри какой-нибудь клетки. Оцените размер одной клетки шахматной доски.

211. В изгородь, состоящую из тонких вертикальных прутьев, 50 раз бросили мяч диаметром 10 см. При этом 18 раз мяч пролетел сквозь изгородь, не задев прутья. Оцените расстояние между прутьями.

212. Комитет по проведению лотерей утверждает, что среди билетов лотереи «Спринт» половина выигрышных. Женя купил два билета этой лотереи и ничего не выиграл. Есть ли у Жени повод усомниться в честности ее устроителей?

213. При бросании кубика три раза подряд выпала шестерка. Есть ли основания думать, что он неправилен?

214. Экзамен по истории включает 60 вопросов. Вова утверждает, что подготовил 80% всех вопросов экзамена. Папа задал ему три вопроса, ни на один из которых он не ответил. Есть ли у папы основания подозревать сына во лжи?

Б

215. Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов — на этот раз поймали 78 рыб, среди которых не оказалось ни одной помеченной! Что можно сказать о количестве рыб, живущих в озере?

216. Перед тем как начать серию испытаний с кубиком, ребята высказали такие предположения:

Егор: Шестерка впервые появится в 6-м испытании.
Олег: Шестерка впервые появится в 1-м испытании.
Глеб: Шестерка впервые появится в 3-м испытании.

У кого из них больше шансов, что сделанный им прогноз оправдается?

217. Вам сдают из колоды 6 карт. Сколько тузов вы, скорее всего, получите?

218. Бросают три кубика. Каково наиболее вероятное значение суммы?

219. Абонент забыл последнюю цифру в номере телефона и набирает ее наугад. Сколько попыток, скорее всего, ему придется сделать?

220*. 5 шариков разбрасывают по 5 ящикам. Каково наиболее вероятное число пустых ящиков?

221*. 100 шариков случайно разбрасывают по 100 ящикам. Оцените, сколько приблизительно ящиков окажутся пустыми.

222*. Из 100 килограммов стекла делают 100 бутылок. В массе стекла 100 камешков. Оцените, сколько приблизительно бутылок окажется:

а) без камешков;
б) с одним камешком;
в) с двумя и более камешками.

223*. У вас есть некоторые подозрения, что шестерка на кубике вашего соперника выпадает чаще обычного. Сколько шестерок должно выпасть в десяти бросаниях кубика, чтобы ваши предположения подтвердились?

224. Цех по производству лампочек должен производить не более 2% брака. Из очередной партии было выбрано 10 лампочек, среди которых 2 оказались бракованными. Есть ли у службы контроля основания забраковать всю партию?

225. 1) Замок на подъезде имеет 10 кнопок с цифрами от 0 до 9 и открывается одновременным нажатием на определенные три кнопки. Подошедший к подъезду человек открыл замок с третьего раза. Знал ли он что-либо о коде замка?

2) На сколько цифр нужно закрывать замок из предыдущей задачи, чтобы подобрать к нему шифр было труднее всего?

226*. Женя купил в магазине булочку с изюмом, но изюма в ней не обнаружил. Есть ли у Жени основания подозревать, что изюм воруют, если средняя норма изюма на одну булку — 30 штук?

227. Комитет по проведению лотерей утверждает, что среди билетов лотереи «Спринт» половина выигрышных. Сколько билетов нужно купить и ничего на них не выиграть, чтобы усомниться в честности устроителей?

228*. Тест содержит 25 вопросов. На каждый вопрос предлагается два варианта ответа, из которых нужно выбрать правильный. За сколько правильных ответов следует ставить положительную оценку?

Ответы и решения

1. B — достоверное; C, E, F (чтобы иметь возможность быть избранным президентом США, надо в США родиться) — невозможные; A, D, G — случайные. Хотя если вы решаете эту задачу накануне выходного дня, то событие D можно считать невозможным.

2. A, B, D — случайные; C — достоверное.

3. A, C, D — случайные; B, F — невозможные; E — достоверное.

4. A, B, C — случайные; D — невозможное.

5. Все события случайные.

6. Если всех-всех-всех всего 1, то событие A — достоверное; если больше 1, то A — случайное событие.

7. При $N \leqslant 366$ событие A — случайное; при $N > 366$ событие A — достоверное.

8. 81 билет. **9.** 11 ботинок.

10. A, C, E, G, H — случайные; B, D — достоверные; F — невозможное.

11. B, C, D — случайные; A, E, F — невозможные.

12. A, C, E — случайные; B, D — невозможные.

13. а) Меньше 9 см; б) больше 9 см; в) ни при какой.

14. Не прав только Саша.

15. Больше 7 минут — случайным, меньше 7 минут — достоверным.

16. а)

N	Событие *A*
1	невозможное
2	невозможное
3	случайное
4	случайное
5	случайное
6	случайное
7	достоверное
8	достоверное
9	достоверное

б)

M	Событие *B*
1	невозможное
2	случайное
3	случайное
4	невозможное

в)

N \ *M*	1	2	3	4
1	д	н	н	н
2	с	с	н	н
3	с	с	с	н
4	н	с	с	н
5	н	с	с	н
6	н	с	с	н
7	н	н	д	н
8	н	н	д	н
9	н	н	д	н

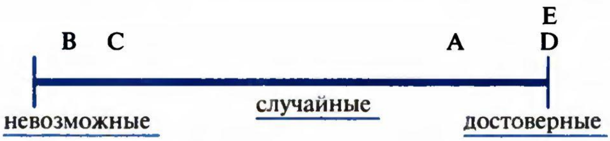
17.

18. У Бориса.

19.

20.

21.



22. См. предыдущие задачи.

23. К Пятачку. В три раза чаще.

24. Шансы *C* больше, чем *B*; шансы *B* больше, чем *A*.

25. Все три вертушки дают одинаковые шансы.

26.

27.

28.

29.

30. а) 1, 2, 3, 6; б) 5; в) 4; г) 3, 4, 6.

31.

32. В этой задаче у каждого может получиться свой ответ.

33. а) Быстрее добирается в школу; б) на метро.

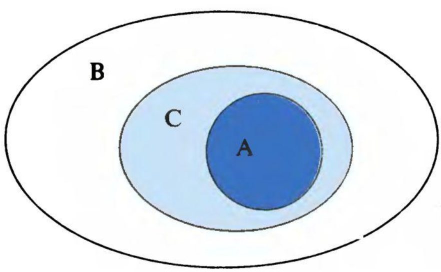
34. Одинаково.

35. Букву «О» (см. рис. 21 к задаче 76).

36. Шансы *C* больше, чем *A*; шансы *A* больше, чем *B*.

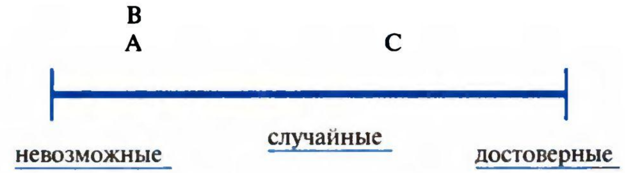
37. Шансы *B* больше, чем *A*.

38. См. рисунок.



39. Неверно.

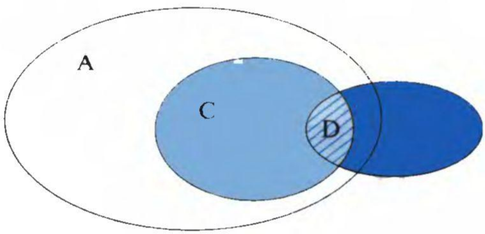
40.



41. *A*, *C*, *E* — меньше, *B*, *D* — больше.

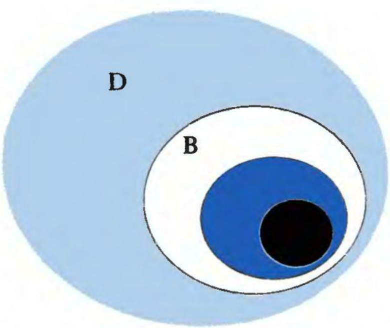
42. *A*—*C*, *B*—*D*.
Все остальные нельзя — для этого не хватает сведений о сложности диктанта.

43. См. рисунок.



44. Событие *D*.

45. См. рисунок.



46.

Исходы	Относительная частота
1	0,173333
2	0,166667
3	0,126667
4	0,18
5	0,166667
6	0,186667

47.

Исходы	Абсолютная частота
1	46
2	58
3	48
4	46
5	44
6	58

48. а) 24 000; б) 0,5005; в) 0,4995.

49.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
«Орел»	141	0,47
«Решка»	159	0,53

52. Частота последнего исхода должна получиться приблизительно в два раза больше — ведь его можно получить двумя разными способами: «орел» — «решка» и «решка» — «орел».

53. Частота события A — 0,13; события B — 0,04; события C — 0; события D — 0,41; события E — 0,46.

54. Частота события A — 0,0667; события B — 0,2133; события C — 0,2866; события D — 0,7133.

55. Частота события A — 0,0114; события B — 0,0359; события C — 0,1345; события D — 0,2505.

56.

Сумма	Абсолютная частота	Относительная частота
2	6	0,06
3	8	0,08
4	12	0,12
5	11	0,11
6	12	0,12
7	11	0,11
8	18	0,18
9	9	0,09
10	7	0,07
11	4	0,04
12	2	0,02

57. В этой задаче гистограмма должна получиться смещенной в сторону меньших значений суммы.

58. а) Минимальное количество — 0, максимальное количество зависит от расстояния между линейками и длины зубочистки.
Это знаменитый опыт Бюффона, правда, проводил он его не с зубочисткой, а с иглой. Подробнее об этом опыте можно прочитать в литературе.

59. Нет, не следует. Приведем только один пример. Пусть первый ученик опросил 5 мужчин (из них 4 близоруких) и 10 женщин (из них 7 близоруких), получив соотношение $\frac{4}{5} > \frac{7}{10}$. Пусть второй ученик опросил 10 мужчин (из них 3 близоруких) и 5 женщин (из них 1 близорукая), получив соотношение $\frac{3}{10} > \frac{1}{5}$. При этом всего было опрошено 15 мужчин (из них 7 близоруких) и 15 женщин (из них 8 близоруких). Для всей совокупности получаем обратное соотношение $\frac{7}{15} < \frac{8}{15}$!

60. Около 8 букв.

61. а) К $\frac{1}{2}$; б) к $\frac{1}{2}$; в) к 0; г) к бесконечности.

62. Сумма этих частот всегда равна 1. Осью симметрии будет прямая $y = \frac{1}{2}$.

63. а) Нет; б) от 0,26 до 0,76.

64. Сумма графиков равна 1.

65. В ситуациях а) и в) — только здесь мы имеем дело с симметричными объектами.

66. Нет. Одного испытания недостаточно, чтобы по частоте оценить вероятность.

67. Нет. Дробь $\frac{12}{50}$ — это частота события *«Кто-нибудь из участников тиража угадает 6 номеров»*. Этих участников, видимо, очень много, поэтому и частота события оказалась такой большой.

68. Нет. Шансы у всех номеров в каждом очередном тираже одинаковые. У природы нет памяти!

69. Да, верно. Состав колоды изменился: среди 16 оставшихся карт 4 туза и только 1 шестерка. Именно в этом принципиальное отличие этой задачи от предыдущей.

70. К $\frac{1}{2}$. Это легко проверить, последовательно вычисляя дроби

$$\frac{542}{1000} = 0{,}542,\ \frac{542 + 500}{1000 + 1000} = 0{,}521,$$

$$\frac{542 + 500 + 500}{1000 + 1000 + 1000} = 0{,}514,\ \ldots,$$

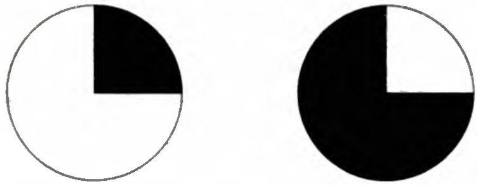
а также дроби

$$\frac{458}{1000} = 0{,}458,\ \frac{458 + 500}{1000 + 1000} = 0{,}479,$$

$$\frac{458 + 500 + 500}{1000 + 1000 + 1000} = 0{,}486,\ \ldots .$$

Это лишний раз показывает, что «решки» вовсе не обязаны в дальнейшем выпадать чаще «орлов» — частоты «орлов» и «решек» могут выровняться и без этого.

71. а) 0,125 и 0,375; б) например, такие, как на рисунке;



в) нельзя. Если обе эти частоты будут приближаться к $\frac{1}{2}$, то частота события *«Одна из стрелок остановилась на белом, другая на черном»* будет приближаться к 0, а это невозможно.

72. Событие *А*. Об этом говорит статистика, приведенная в примерах 1 и 2.

73. Например О ООР ОООРР ООООРРР ... . В этой серии после одного «орла» идет нуль «решек», после двух «орлов» — одна «решка», после трех «орлов» — две «решки» и т. д. Несложно доказать, что разность абсолютных частот здесь неограниченно возрастает, а разность относительных — убывает к нулю.

74. Для первого игрока — $\frac{2}{3}$, для второго — $\frac{1}{3}$.

75. Вова ошибочно полагал, что разность абсолютных частот «орлов» и «решек» будет колебаться около нуля. В реальной серии экспериментов (проверьте!) она будет неограниченно возрастать, поэтому Машин график гораздо сильнее отклоняется от нуля.

76. Если вы правильно найдете величину сдвига, то прочитаете отрывок из повести А. С. Пушкина «Путешествие в Арзрум во время похода 1829 года».

77. а) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$; б) $\frac{10}{33} = 0{,}303$; в) $\frac{4}{7} = 0{,}571$; г) $\frac{52}{365} = 0{,}142$.

Ответ $\frac{1}{7} = 0{,}143$ тоже годится, но он неточный! Каждый год содержит лишь приблизительно одинаковое количество понедельников, вторников и т. д. На самом деле эти количества могут отличаться на 1.

78. $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $P(B) = \frac{1}{6} = 0{,}167$; $P(C) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$; $P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$; $P(F) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} = 0{,}889$.

79. $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. **80.** Нет. На самом деле $\frac{1}{36} = 0{,}028$.

81. а) Обыкновенный год содержит 365 дней, а високосный — 366 дней. Какой же ответ правильный: $\frac{1}{365} = 0{,}002740$ или $\frac{1}{366} = 0{,}002732$? Правильнее взять четырехлетие, включающее високосный год: $\frac{4}{3 \cdot 365 + 366} = 0{,}002738$ — получим нечто среднее. Но и этот ответ не совсем точный: ведь високосными не считаются годы, делящиеся на 100, поэтому лучше взять столетие: $\frac{100}{76 \cdot 365 + 24 \cdot 366} = 0{,}00273793$.

А вот если год делится на 400, то он все-таки считается високосным, поэтому абсолютно правильный ответ будет только, если взять двухтысячелетие:

$$\frac{2000}{1515 \cdot 365 + 485 \cdot 366} = 0{,}00273791.$$

б) см. пункт а);

в) этот пункт без учета високосных лет вообще решать нельзя: $\frac{1}{3 \cdot 365 + 366} = 0{,}000685$, точнее

$$\frac{24}{76 \cdot 365 + 24 \cdot 366} = 0{,}000657,$$

или, еще точнее,

$$\frac{485}{1515 \cdot 365 + 485 \cdot 366} = 0{,}000664.$$

82. а) $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; б) $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

83. а) $\frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0{,}667$;

б) $\frac{3}{10} > \frac{5}{20}$, поэтому лучше вызвать мальчика;

в) $\frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 0{,}833$.

84. $\frac{3}{28} = 0{,}107$.

85. а) $\frac{13}{125} = 0{,}104$; $\frac{12}{125} = 0{,}096$;

б) нет, неверно. У обоих шансы $\frac{1}{125}$.

86. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

87. а) $\frac{21}{90} = 0{,}233$; б) $\frac{69}{90} = 0{,}767$;

в) $\frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0{,}2$; г) $\frac{34}{90} = \frac{17}{45} = 0{,}378$.

88. $\frac{1000}{1\,000\,000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

89. а) $\frac{1}{2} = 0{,}5$; б) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$; в) $\frac{1}{N+1}$.

90. а) $\frac{2}{3}$; б) все равно $\frac{2}{3}$.

91. а) $\frac{2}{21} \approx 0{,}095$; б) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$.

92. а) $\frac{99}{100} = 0{,}99$; б) $\frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

93. а) $\frac{1}{2} = 0{,}5$; б) $\frac{1}{4} = 0{,}25$; в) $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

94. а) $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; б) $\frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 6} = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$; в) $\frac{5 \cdot 5 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$.

95. а) Например 1, 2, 4, 8; б) например, 1, 1, 1, 10;
в) например, 4, 4, 7, 10; г) например, 1, 1, 1, 1.

96. $P(A) = \frac{1}{6} = 0{,}167$; $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}333$; $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} =$
$= 0{,}5$; $P(D) = 0$.

97. *A={1, 3, 5}; B={2, 3, 4, 5, 6}; C={∅}; D={2, 3, 5};*
E={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

98. а) *A={2 «орла», 2 «решки»}* — частота 0,48;
C={2 «орла», «орел» и «решка»} — частота 0,71;
б) *A={OO, PP}* — частота 0,48; *B={OO, OP}* — частота 0,47;
C={OO, OP, PO} — частота 0,71;
в) 2 «орла» = {OO}, «орел» и «решка» = {OP, PO},
2 «решки» = {PP};
г) исходы второй таблицы равновозможны.

99. а) *A={1к1ж, 1к1з, 1ж1з}* — частота 0,78;
C={2ж, 2з, 1ж1з} — частота 0,4;
б) *A={КЖ, КЗ, ЖК, ЖЗ, ЗК, ЗЖ}* — частота 0,78;
B={КК, КЖ, КЗ} — частота 0,36;
C={ЖЖ, ЖЗ, ЗЖ, ЗЗ} — частота 0,4;
в) 2к = {КК}, 2ж = {ЖЖ}, 2з = {ЗЗ}, 1к1ж = {КЖ, ЖК},
1к1з = {КЗ, ЗК}, 1ж1з = {ЖЗ, ЗЖ};
г) в обеих таблицах исходы неравновозможны! Например, вероятность исхода КЖ больше, чем КК (ведь после того, как один красный шар уже вытащили, красных шаров в урне осталось меньше, чем желтых).

100. Частота $A = \frac{19}{40} = 0{,}475$; частота $B = \frac{13}{40} = 0{,}325$;

частота $C = \frac{3}{40} = 0{,}075$; частота $D = \frac{1}{40} = 0{,}025$.

Событие D является элементарным.

101. а) {OOO, OOP, OPO, OPP, POO, POP, PPO, PPP};

б) {3 «орла», 2 «орла» и 1 «решка», 1 «орел» и 2 «решки», 3 «решки»}.

102. а) {111, 112, ..., 116, 121, 122, ..., 126, ..., 661, 662, ..., 666} — все возможные варианты выпадения очков на первом, втором и третьем кубиках;

б) {3, 4, 5, ..., 18} — возможные значения суммы очков на трех кубиках;

в) {на кубиках выпало равное количество очков}.

103. а) {ПН, ВТ, СР, ЧТ, ПТ, СБ, ВС};

б) {январь, февраль, ..., декабрь};

в) {1 января, 2 января, ..., 31 декабря}.

Только в первой системе исходы равновозможны. Во второй системе месяцы имеют разное количество дней, поэтому вероятность февраля будет меньше, чем марта. В третьей системе один из исходов — 29 февраля — имеет в 4 раза меньшую вероятность, чем остальные.

104. Выложим все пары ботинок в один ряд и перенумеруем их подряд: 0, 1, 2, ..., 9 (левые ботинки получат четные номера, а правые — нечетные). Тогда исходом нашего опыта будут любые 4 различных числа от 0 до 9.

а) 1357 — благоприятный исход (все четыре ботинка на правую ногу);

б) 1234 — неблагоприятный исход (вытащили две первые пары).

105. *A* — a1f1; *B* — a1c3; *C* — a1b3; *D* — a1d2.

Больше всего исходов содержит событие D.

106. Занумеруем все конфеты цифрами от 0 до 9, причем конфетам с сюрпризом припишем номера 0 и 1. Исходом будем считать любую пятерку различных цифр — это будут номера конфет, доставшихся Винни-Пуху. Тогда примерами благоприятных исходов будут: *A* — 23456; *B* — 01234; *C* — 02345. Общих исходов у этих событий нет. Исходов, которые не попадают ни в одно из них, тоже нет (т. е. эти события разбивают все исходы на непересекающиеся множества — в математике такая система событий называется разбиением).

107. а) к1к2, к2к1, к1ж1, ж1к1 ... ; всего $6 \cdot 5 = 30$ исходов;

б) [к1к2], [к1ж1], ... Квадратные скобки показывают, что порядок следования шаров не учитываются. Всего $\frac{6 \cdot 5}{2} =$ $= 15$ исходов;

в) каждому исходу пункта б) соответствует два исхода пункта а);

г) в каждой из этих систем исходы равновозможны; в пункте а) вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{30}$, в пункте б) — $\frac{1}{15}$.

108. а) {ООООО, ООООР, ОООРО, ОООРР, ..., РРРРР};

б) {[ООООО], [ООООР], [ОООРР], [ООРРР], [ОРРРР], [РРРРР]}.

В первой системе исходы равновозможны, во второй — нет.

109. В первой системе исходы равновозможны, во второй — нет. Например, исходу $8 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ соответствует только один исход 11111111, а исходу $2 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0$ соответствуют исходы 11223344, 12341234 и многие другие.

110. а) Обозначим шляпу первого господина 1, второго — 2, третьего — 3. Тогда исходом эксперимента можно считать любую перестановку из чисел 1, 2, 3. Например, исход 123 означает, что каждый надел свою шляпу. Всего исходов будет 6: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Все они равновозможны.

б) Пусть k — количество шляп, надетых на головы своих владельцев. Тогда мы имеем три возможных исхода: $k = 3$, $k = 1$, $k = 0$ ($k = 2$ невозможно). Они неравновозможны — это легко понять, установив соответствие с первой системой:

$k = 3$ — {123}; $k = 1$ — {132, 213, 321}; $k = 0$ — {231, 312}.

111. Исходы неравновозможные. Первый игрок выигрывает при исходах {О, РРО, РРРРО, ... }. Таких исходов бесконечно много.

112. а) *Ольга*: на одной бумажке написано 1, на другой — 2, на третьей — ×. Бумажки тянутся до появления ×.

Маша: на бумажках написано то же самое, но вытягиваются все три бумажки до конца.

Ирина: на одной бумажке написан ×, а на двух других — 0. Бумажки тянутся до появления ×.

Очевидно, что Машины исходы равновозможны.

Ольгины исходы неравновозможны: исходу $\times$ соответствуют два исхода $\times12$ и $\times21$, а всем остальным — по одному. Иринины исходы равновозможны: каждому из них соответствуют по два Машиных исхода.

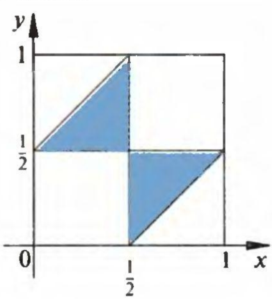
б) Исходы неравновозможные. *Ольга*: О, РРРО, РРРРРРО, ...;
Маша: РО, РРРРО, РРРРРРРО, ...;
Ирина: РРО, РРРРРО, РРРРРРРРО, ...

113. Занумеруем юношей цифрами 1, 2, 3, а девушек — 4, 5, 6. Тогда любой исход можно обозначить шестизначным числом, у которого первые три цифры выбираются из множества {4, 5, 6} — это выбор юношей, а последние три — из множества {1, 2, 3} — это выбор девушек. Например: 444111 — совпала одна пара: юноша 1 выбрал девушку 4, а девушка 4 юношу 1; 456123 — совпало три пары и т. д. Всего таких исходов будет $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$. Все они равновозможны.

114. 1) а) Благоприятный; равносторонний треугольник;
б) неблагоприятный;
в) благоприятный; разносторонний треугольник;
г) благоприятный; равнобедренный треугольник;
д) неблагоприятный.

2) Должна выполняться одна из двух систем:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{2}, \\ y < x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ y < \frac{1}{2}, \\ y > x + \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Их решением будет множество точек, изображенное на рисунке.

115. а) 8; б) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$; в) $\frac{7}{8} = 0,875$.

116. а) 36: б) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$; в) $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0,417$;

г) вероятность суммы 6 будет $\frac{5}{36}$, суммы 5 – $\frac{4}{36}$; сумма 6 будет выпадать чаще;

д) самое вероятное значение суммы 7; его вероятность — $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

117. а) $6^6 = 46\,656$; б) $\frac{7}{46\,656} \approx 0,00015$.

118. $\frac{1}{6} \approx 0,167$. Задачу можно решить двумя способами. *1-й способ*: считаем, что шары вынимают одновременно; число всех возможных исходов будет $C_4^2 = 6$, из которых только один благоприятный. *2-й способ*: считаем, что шары вынимают друг за другом; тогда всего исходов будет $4 \cdot 3 = 12$, из которых уже 2 благоприятных.

119. Правильный ответ в) — $\frac{1}{3}$. Помните, что природа различает не цвета, а предметы! Для подсчета исходов — см. предыдущую задачу.

120. $\frac{1}{C_{10}^3} = \frac{3! \cdot 7!}{10!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{120} \approx 0,00833$.

121. $\frac{3600}{10^5} = \frac{36}{1000} = 0,036$. Всего комбинаций — 10^5. За час мы успеем перебрать 3600 комбинаций. Та единственная комбинация, на которую закрыт замок, окажется среди них с вероятностью $\frac{3600}{10^5}$.

122. $\frac{12!}{12^{12}} \approx 0,000054$. По правилу умножения существует 12^{12} способов выбрать месяцы рождения для участников компании. Благоприятными будут те 12! способов, в которых все месяцы различные.

123. а) $\frac{10 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9} \approx 0,222$; б) $\frac{2 \cdot 8! + 8 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Для круглого стола эта вероятность больше, что вполне согласуется со здравым смыслом.

Перенумеруем все 10 мест. Существует 10! способов рассадить на эти места участников праздника (и для стола, и для дивана). А вот число благоприятных исходов будет разное. За круглым столом 10-ю способами можно выбрать место для Деда Мороза, после чего остаются 2 способа посадить Снегурочку (по левую и по правую руку от Деда) и 8! способов для всех остальных. Для дивана подсчет будет сложнее — придется применить правило сложения: если Деда сажаем с краю, то для него — 2 способа, для Снегурочки — только 1, для всех остальных — 8!; если Деда сажаем в середине, то для него — 8 способов, для Снегурочки — 2 способа, для всех остальных — по-прежнему 8!

124. а) $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \approx 0{,}027$; б) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{36} \approx 0{,}556$;

в) $\frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{6^3} = \frac{15}{36} \approx 0{,}417$.

Сложнее всего определить число благоприятных исходов в пункте в). Сначала выберем пару кубиков, на которых выпадут одинаковые числа. Это можно сделать тремя способами: 1-й и 2-й, 1-й и 3-й, 2-й и 3-й. Теперь нужно указать два различных числа: первое — для выбранной пары, второе — для оставшегося кубика. Это можно сделать $6 \cdot 5$ способами.

125. $\frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} \approx 0{,}098$. Всего «доминошек» в колоде — 28, дублей — 7, не дублей — 21. Дальше остается применить правило умножения.

126. Обозначим неизвестное количество шаров через k. Тогда

$\frac{k \cdot (k-1)}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}$, откуда $k = 4$.

127. $\frac{9^3}{10^3} = 0{,}729$.

128. а) $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; б) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$; в) $\frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

Помните, что природа различает кубики, а не написанные на них буквы.

129. $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8-9\cdot 8\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8}=1-\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8}=1-\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}=0{,}3.$

Переформулируем задачу: вам нужно угадать задуманную кем-то цифру. С какой вероятностью она окажется среди трех (разумеется, различных) названных вами цифр? При такой формулировке ответ $\frac{3}{10}$ получается сразу.

130. а) $1-\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{3}{10}=0{,}3;$ б) 6 попыток: $\dfrac{6}{10}>\dfrac{1}{2}$.

См. решение предыдущей задачи.

131. а) 2 раза: $\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}$; б) 4 раза: $1-\dfrac{5^4}{6^4}>\dfrac{1}{2}$;

в) 6 раз: $1-\dfrac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}>\dfrac{1}{2}$.

132. Обозначим неизвестное количество билетов через k. Тогда $1-\dfrac{1}{2^k}>0{,}95$, откуда $k=5$.

133. $\dfrac{2\cdot 5!\cdot 5!}{10!}=\dfrac{1}{126}\approx 0{,}0079$. 10 человек можно посадить на 10 мест 10! способами. Чтобы никакие два мальчика и никакие две девочки не оказались рядом, все мальчики должны сидеть на четных местах, а девочки на нечетных или наоборот. Для каждого из этих двух вариантов мальчиков и девочек можно рассадить $5!\cdot 5!$ способами.

134. $\dfrac{C_{32}^{16}\cdot C_4^2}{C_{36}^{18}}=\dfrac{32}{16!\cdot 16!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\dfrac{18!\cdot 18!}{36!}=\dfrac{153}{385}\approx 0{,}397$. Переформулируем задачу: вы берете себе 18 карт из 36-ти; какова вероятность, что среди них окажется ровно 2 туза? Всего исходов — C_{36}^{18}. Для благоприятного исхода мы должны выбрать 2 карты из 4-х тузов, а затем 16 карт из 32-х не тузов — по правилу умножения это можно сделать $C_{32}^{16}\cdot C_4^2$ способами.

135. $\dfrac{C_{10}^{5}\cdot C_{10}^{5}}{C_{20}^{10}}\approx 0{,}344$. Выбрать 10 человек, которые пойдут в театр, из 20-ти учеников можно C_{20}^{10} способами. Для благоприятного исхода нужно выбрать 5 из 10-ти мальчиков и 5 из 10-ти девочек — это можно сделать $C_{10}^{5}\cdot C_{10}^{5}$ способами.

136. $\dfrac{4}{7}=0{,}571$. Задачу можно решить без всякой комбинаторики, если нарисовать «дерево четвертьфиналов» (спросите у футбольных болельщиков, что это такое) и посеять на нем «Спартак». Для «Динамо» на этом дереве останется 7 мест, из которых ровно 4 благоприятных (т. е. таких, что посеянное на них «Динамо» не встретит «Спартак» вплоть до финала).

137. $\dfrac{2^{10}\cdot 10!\cdot 10!}{20!}\approx 0{,}0055$. 20 человек можно посадить на 20 мест 20! способами. При благоприятном исходе за каждой из 10-ти парт сидит ровно один мальчик — эти места для мальчиков можно выбрать 2^{10} способами (два варианта для каждой из 10-ти парт). Теперь мальчиков можно рассадить по своим местам 10! способами и девочек по своим — тоже 10! способами.

138. $\dfrac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{8}{21}=0{,}381$. Вытащить друг за другом 4 ботинка из 10-ти можно $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ способами. При благоприятном исходе первый ботинок можно вытащить 10-ю способами, второй — только 8-ю (нельзя брать уже выбранный и парный к нему), третий — 6-ю и четвертый — 4-мя способами.

139. а) $\dfrac{64-15}{64}=\dfrac{49}{64}=0{,}766$;

б) $\dfrac{(64-8)\cdot 28+(64-10)\cdot 20+(64-12)\cdot 12+(64-14)\cdot 4}{64\cdot 63}=$

$=0{,}861$. Если поставить на шахматную доску ладью, она будет держать под боем 14 клеток и на одной клетке стоять сама — значит, для второй ладьи благоприятных (не находящихся под боем) клеток останется $64 - 15 = 49$. Если поставить на доску слона, то число находящихся под боем клеток будет зависеть от того, в какую часть доски мы его поставили, поэтому в пункте б) приходится применить комбинаторное правило сложения.

140. $P(A) = \dfrac{C_8^5}{C_{10}^5} = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}222$; $P(B) = \dfrac{5}{9} \approx 0{,}556$; $P(C) = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}222$.

Выбрать 5 конфет из 10-ти можно C_{10}^5 способами. Для события *A* благоприятными будут исходы, в которых все 5 конфет выбраны из 8-ми «бессюрпризных» — это можно сделать C_8^5 способами. Аналогично подсчитывается число благоприятных исходов для событий *B* и *C*.

141. $P(A) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$; $P(B) = 0$; $P(C) = \dfrac{C_{20}^{10}}{2^{20}} = 0{,}176$. Для 20-ти испытаний имеется 2^{20} возможных исходов. Чтобы сформировать благоприятный исход, нужно указать 10 из 20-ти испытаний, в которых выпадет «орел» — это можно сделать C_{20}^{10} способами.

142. $\dfrac{1 - \dfrac{C_{10}^5}{2^{10}}}{2} = 0{,}377$. При 10-кратном бросании монеты всего существует 2^{10} исходов. При этом в C_{10}^5 из них число «орлов» равно числу «решек». Значит, в $(2^{10} - C_{10}^5)$ исходах эти два числа не равны. Ровно в половине из них «орлов» больше, чем «решек».

143. $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$. Ответ не зависит от количества испытаний. Эту задачу можно решить интересным методом, довольно часто используемым в математике. При n-кратном бросании монеты имеется 2^n возможных исходов. Все они делятся на благоприятные (где количество «орлов» нечетно) и неблагоприятные (количество «орлов» четно). Докажем, что их поровну. Заменим в каждом из исходов результат первого бросания на противоположный (например, исход ОРРО... превратится в РРРО...). Докажите, что это отображение, во-первых, взаимно-однозначно, а во-вторых, переводит любой благоприятный исход в неблагоприятный и наоборот.

144. а) Четное число — «решка», нечетное число — «орел»;
б) красная масть — «решка», черная масть — «орел».

145. а) ОО — к Винни-Пуху, иначе — к Пятачку;
б) бросить монету дважды и сделать как в пункте а).

146. а) Берем две цифры и к полученному числу прибавляем 1; для нашей таблицы получится число 3;
б) делаем то же самое, что в пункте а), но если получится число больше 80, то берем следующие две цифры и т. д.; для нашей таблицы получится число 3;
в) берем три цифры и к полученному числу прибавляем 1; если получится число больше 120, то берем следующие три цифры и т. д.; для нашей таблицы получится число 22.

147. Текст программы на языке *Turbo Pascal*:

```
program Pirson;
    const N=24000;
    var H,T,i:integer;
begin
    randomize;
    H:=0; T:=0;
    for i:=1 to N do
        if random(2)=0 then H:=H+1
        else T:=T+1;
    writeln('Абс.частоты:');
    writeln('O-',H,' P-',T);
    writeln('Отн.частоты:');
    writeln('O-',H/N,' P-',T/N);
end.
```

148. а) Для 100 опытов понадобится 175 цифр. Для 1000 опытов понадобится приблизительно $1000 : \frac{6}{10} \approx 1667$ цифр (точный подсчет для данной таблицы даст 1671 цифру — отличие от нашей оценки очень небольшое).

б)

1	2	3	4	5	6
0,19	0,16	0,14	0	0,14	0,17

149.

1	2	3	4	5	6
0,24	0,15	0,16	0,13	0,16	0,16

150. Текст программы на языке *Turbo Pascal*:

```
program Hats;
    const k=3;
    var N,i,A,B,C,D:longint;
        j,r,x,Count:integer;
        H:array[1..k] of integer;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    A:=0; B:=0; C:=0; D:=0;
    for i:=1 to N do
    begin
        for j:=1 to k do H[j]:=j;
        for j:=k downto 1 do
        begin
            r:=random(j)+1;
            x:=H[j];H[j]:=H[r];H[r]:=x;
        end;
        Count:=0;
        for j:=1 to k do if H[j]=j then inc(Count);
        case Count of
            3:inc(A);
            0:inc(B);
            1:inc(C);
            2:inc(D);
        end;
    end;
    writeln('P(A)=',A/N:7:5);
    writeln('P(B)=',B/N:7:5);
    writeln('P(C)=',C/N:7:5);
    writeln('P(D)=',D/N:7:5);
end.
```

151. Будем считать четную цифру выпадением «орла», а нечетную — «решки». Тогда таблица случайных чисел даст результаты:

	Выиграл первый	Выиграл второй
После 10 партий	0,6	0,4
После 50 партий	0,66	0,34
После 100 партий	0,68	0,32

Программа позволяет провести любое количество экспериментов практически мгновенно:

```
program OP;
    var P1,P2,N,k,i:longint;
begin
    randomize;
    write('N='); readln(N);
    P1:=0; P2:=0;
    for i:=1 to N do
    begin
        k:=0;
        while random(2)=1 do inc(k);
        if k mod 2 =1 then inc(P1)
        else inc(P2);
    end;
    writeln('Первый игрок:',P1/N);
    writeln('Второй игрок:',P2/N);
end.
```

Результаты программы достаточно наглядно показывают, что шансы первого игрока равны приблизительно $\frac{2}{3}$, а второго — $\frac{1}{3}$.

152. Нет, нельзя. Цифры в показании термометра имеют совершенно другое распределение. Так, первой цифрой может быть только 3 или 4, а в таблице — любая цифра от 0 до 9. Скажем, в нашей таблице первым показанием термометра была бы температура 2,1. Не поможет здесь и пропускание некоторых цифр, как это было в опыте с кубиком.

153. Нет, неправильно. По тем же причинам, что и в предыдущей задаче.

154. Будем считать, что стержень имеет единичную длину, и вычислим координаты точек изломов с точностью до 0,001. Тогда нам нужно получить три случайные цифры одного числа — X и три случайные цифры другого — Y. Вот что дает таблица случайных чисел:

1-я пара точек:	0,021; 0,393;	$P = 0$;
...		
10-я пара точек:	0,413; 0,366;	$P = 0,3$;
...		
50-я пара точек:	0,016; 0,256;	$P = 0,22$.

Более точную картину можно получить с помощью программы:

```
program Pivot;
    var N,i,k:longint;
        x,y,z,p:real;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    k:=0;
    for i:=1 to N do
    begin
        x:=random; y:=random;
        if x>y then
            begin z:=x;x:=y;y:=z end;
        if (x<1/2)and(y-x<1/2)and(y>1/2) then
        k:=k+1;
    end;
    p:=k/N;
    writeln(p);
end.
```

155. Закодируем все карты последовательностями из пяти нулей и единиц:

$$00000,\ 00001,\ 00010,\ \ldots,\ 11111.$$

Всего таких последовательностей будет $2^5 = 32$, и их как раз хватит на все карты. Теперь пять раз подряд бросим монету и запишем результат в виде пяти нулей и единиц (например 0 — «орел», 1 — «решка»). Это и будет код выбранной карты.

156. Будем выбирать из таблицы восьмерки случайных цифр: первая цифра — номер остановки для первого пассажира, вторая цифра — для второго пассажира и так до восьми. Цифрой 0 договоримся обозначать 10-ю остановку. После 100 таких «поездок» будут выбраны 800 цифр, и получится такой результат:

$P(A) = 0{,}03$; $P(B) = 0$; $P(C) = 0{,}57$; $P(D) = 0{,}43$; $P(E) = 0{,}69$.

Как всегда, более точные оценки можно получить с помощью программы:

```
program Bus;
    const k=8; L=10;
    var N,i,A,B,C,D,E:longint;
        j,Max:integer;
        Num:array[1..k] of integer;
        Count:array[1..L] of integer;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    for i:=1 to N do
    begin
        for j:=1 to k do Num[j]:=random(L)+1;
        {Кол-во пассажиров на каждой остановке}
        for j:=1 to L do Count[j]:=0;
        for j:=1 to k do inc(Count[Num[j]]);
        Max:=Count[1];
        for j:=2 to L do
            if Count[j]>Max then Max:=Count[j];
        if Max=1 then inc(A);
        if Max=k then inc(B);
        if Count[5]>0 then inc(C);
        if Count[5]=0 then inc(D);
        if Count[1]>0 then inc(E);
    end;
    writeln('P(A)=',A/N);
    writeln('P(B)=',B/N);
    writeln('P(C)=',C/N);
    writeln('P(D)=',D/N);
    writeln('P(E)=',E/N);
end.
```

157. Будем считать красными шарами цифры 1 и 2, желтыми — 3 и 4, зелеными — 5 и 6. Все остальные цифры будем пропускать. Если в выбранной паре цифр вторая совпадает с первой, мы также будем ее пропускать. По нашей таблице получим следующую серию опытов:

21—КК; 32—ЖК; 63—ЗЖ;
13—КЖ; 61—ЗК; 63—ЗЖ; ... .

Для моделирования на компьютере можно использовать следующую программу:

```
program Balls;
    var N,i,RR,YY,GG,RY,RG,YG:longint;
        b1,b2,j:byte;
        Color:array[1..3] of byte;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    RR:=0;YY:=0;GG:=0;RY:=0;RG:=0;YG:=0;
    for i:=1 to N do
    begin
        for j:=1 to 3 do Color[j]:=0;
        b1:=random(6)+1;
        repeat
            b2:=random(6)+1;
        until b2<>b1;
        inc(Color[(b1+1) div 2]);
        inc(Color[(b2+1) div 2]);
        if Color[1]=2 then inc(RR)
        else if Color[2]=2 then inc(YY)
        else if Color[3]=2 then inc(GG)
        else if Color[3]=0 then inc(RY)
        else if Color[2]=0 then inc(RG)
        else if Color[1]=0 then inc(YG)
    end;
    writeln('2к — ',RR/N);
    writeln('2ж — ',YY/N);
    writeln('2з — ',GG/N);
    writeln('1к1ж — ',RY/N);
    writeln('1к1з — ',RG/N);
    writeln('1ж1з — ',YG/N);
end.
```

158. Как моделировать бросание кубиков с помощью таблицы случайных чисел, вы уже знаете, поэтому приведем только моделирующую программу:

```
program Cube3;
  var N,i:longint;
      s,m:byte;
      k1,k2,k3,x:1..6;
      Ps,Pm:array[2..12] of longint;
begin
  randomize;
  write('N=');readln(N);
  for i:=1 to N do
  begin
      k1:=random(6)+1;
      k2:=random(6)+1;
      s:=k1+k2;
      if k1<k2 then x:=k1 else x:=k2;
      k3:=random(6)+1;
      if k3<x then x:=k3;
      m:=k1+k2+k3-x;
      inc(Ps[s]);
      inc(Pm[m]);
  end;
  for i:=2 to 12 do
      writeln(i:2,' — ',Ps[i]/N,' ',Pm[i]/N);
end.
```

159. а) Следующая программа докажет вам справедливость описанного жребия:

```
program Sisters;
  const k=3;
  var N,i:longint;
      j,r,x:byte;
      H:array[1..k] of byte;
      P:array[1..k] of longint;
begin
  randomize;
  write('N=');readln(N);
  for i:=1 to N do
  begin
      for j:=1 to k do H[j]:=j;
      for j:=k downto 1 do
      begin
          r:=random(j)+1;
          x:=H[j];H[j]:=H[r];H[r]:=x;
      end;
```

```
    if H[1]=1 then inc(P[1])
    else if H[2]=1 then inc(P[2])
    else inc(P[3]);
    end;
    writeln(P[1]/N:7:4,P[2]/N:7:4,P[3]/N:7:4);
end.
```

б) Несправедливость жребия докажет программа:

```
program SistersNew;
    const k=3;
    var N,i,m:longint;
        P:array[1..k] of longint;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    for i:=1 to N do
    begin
        m:=0;
        while random(2)=1 do inc(m);
        inc(P[m mod k + 1]);
    end;
    writeln(P[1]/N:7:4,P[2]/N:7:4,P[3]/N:7:4);
end.
```

160. Следующая программа продемонстрирует, что наиболее вероятное число образовавшихся пар — 1:

```
program Love;
    const k=3;
    var N,i:longint;
        j,Count:byte;
        M,W:array[1..k] of byte;
        P:array[0..k] of longint;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    for i:=1 to N do
    begin
        for j:=1 to k do
        begin
            M[j]:=random(3)+4;
            W[j]:=random(3)+1;
        end;
```

```
        Count:=0;
        for j:=1 to k do
            if W[M[j]-3]=j then inc(Count);
        inc(P[Count]);
    end;
    for j:=0 to k do
    writeln(j,' пар — ',P[j]/N:7:4);
end.
```

161. Провести с помощью таблицы случайных чисел даже один такой эксперимент непросто: нужно выбрать 100 последовательных пар случайных цифр. Каждую пару можно рассматривать как номер бутылки, в которую попал очередной камешек. Случайно выбранной бутылкой можно считать бутылку с номером 00. Остается подсчитать, сколько раз этот номер встретился в нашей сотне чисел. Теперь этот эксперимент нужно повторить достаточно много раз (хотя бы 100).

Гораздо выгоднее, как всегда, использовать компьютер:

```
program Bottles;
    var N,i:longint;
        j:byte;
        Count:array[1..100] of byte;
        P0,P1,P2:longint;
begin
    randomize;
    write('N=');readln(N);
    for i:=1 to N do
    begin
        for j:=1 to 100 do Count[j]:=0;
        for j:=1 to 100 do
            inc(Count[random(100)+1]);
        if Count[1]=0 then inc(P0)
        else if Count[1]=1 then inc(P1)
        else inc(P2);
    end;
    writeln(P0/N:7:4,P1/N:7:4,P2/N:7:4);
end.
```

162. Частоты русских букв в любом тексте может найти следующая программа (мы не рассматриваем в ней букву «ё», так как во всех печатных текстах она заменяется на «е»):

```
program Letters;
    const Letter:string[64]=
        'абвгдежзийклмнопрстуфхцчшщъыьэюя'+
        'АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ';
    var Count:longint;
        L:array[1..32] of longint;
        i:byte;
        f:text;
        Name:string;
        c:char;
begin
    write('Имя файла: ');readln(Name);
    assign(f,Name);reset(f);
    while not eof(f) do
    begin
        read(f,c);
        i:=pos(c,Letter);
        if i<>0 then
        begin
            if i>32 then i:=i-32;
            inc(Count);
            inc(L[i]);
        end;
    end;
    close(f);
    for i:=1 to 32 do
    begin
        write(Letter[i]:2,'—',L[i]/Count:6:4);
        if i mod 8 =0 then writeln
    end;
end.
```

Вероятность, что случайная буква текста будет гласной, должна получиться около 0,36. Хотя она не сильно отличается от величины $\frac{10}{33} \approx 0,303$, вычислять эту вероятность по приведенной формуле нельзя — ведь мы выбираем букву из текста, а не из алфавита!

163. Приведенная ниже программа находит частоты 1-буквенных, 2-буквенных и т. д. слов в произвольном русском тексте. Переносы слов при этом не учитываются:

```
program Words;
    const Letter:string[66]=
        'абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчшщъыьэюя'+
        'АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ';
    var Count:longint;
        L:array[1..100] of longint;
        i,w,Maxw:byte;
        f:text;
        Name:string;
        c:char;
begin
    write('Имя файла: ');readln(Name);
    assign(f,Name);reset(f);
    Maxw:=0; w:=0;
    while not eof(f) do
    begin
        read(f,c);
        i:=pos(c,Letter);
        if i<>0 then inc(w)
        else if w>0 then
        begin
            inc(Count);
            inc(L[w]);
            if w>Maxw then Maxw:=w;
            w:=0;
        end;
    end;
    close(f);
    for w:=1 to Maxw do
        writeln(w:2,'—',L[w]/Count:8:6);
end.
```

164. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 0.

165. а) $\frac{17{,}0754 \text{ млн км}^2}{510{,}2 \text{ млн км}^2} = 0{,}0335$; б) $\frac{179{,}7 \text{ млн км}^2}{510{,}2 \text{ млн км}^2} = 0{,}3522$; в) $\frac{1}{2}$.

166. $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

167. В сторону 70-го километра. С вероятностью $\frac{2}{3}$.

168. а) $\frac{9}{25} = 0{,}36$; б) 0,18.

169. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 0.

170. а) 0; б) $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

171. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$.

172. $\frac{23^2}{24^2} \approx 0{,}9184$.

173. $\frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

174. а) 0; б) $\frac{4\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$.

175. а) $\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$; б) $\frac{4 \cdot 2^3}{3^4} = \frac{32}{81}$; в) $\frac{C_4^2 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{6 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{24}{81}$;

г) $\frac{4 \cdot 2}{3^4} = \frac{8}{81}$; д) $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

176. $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

177. $\sqrt{2} - 1$.

178. Вероятность равна 0 при $r \geqslant \frac{a}{2\sqrt{3}}$, вероятность равна

$\left(1 - \frac{2\sqrt{3}r}{a}\right)^2$ при $r < \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

179. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{6}$.

180. Вот пример расписания, при котором такое возможно:
в бабушкином направлении: ...— 12.00 — 12.05 — 12.10 —...
в дедушкином направлении: ...— 12.01 — 12.06 — 12.11 —...
Тогда вероятность попасть к бабушке будет $\frac{4}{5}$, к дедушке — $\frac{1}{5}$.

181. Вероятность поехать вместе будет $\frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$. Следовательно, за год им удастся поехать вместе приблизительно $200 \cdot \frac{5}{9} \approx 111$ раз.

182. Вероятность, что Андрея обгонит автобус, составит $\frac{13}{25} > \frac{1}{2}$. Следовательно, лучше подождать автобус (хотя отклонение от $\frac{1}{2}$ столь незначительное, что можно и пройтись пешком).

183. $\frac{1}{4}$.

184. Первое распределение.

ω	ООО	ООР	ОРО	ОРР	РОО	РО	РРО	РРР
$p(\omega)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Второе распределение.

ω	3 «орла»	2 «орла», 1 «решка»	1 «орел», 2 «решки»	3 «решки»
$p(\omega)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

185. Первое распределение.

ω	КК	КЖ	ЖК	ЖЖ
$p(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Второе распределение.

ω	2 красных	1 красный, 1 желтый	2 желтых
$p(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Равновозможные исходы можно получить, если различать все 4 шара, а не только их цвета.

186. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; в) $\frac{7}{8}$.

187. Первое распределение.

ω	ВВ	ВН	НВ	НН
$p(\omega)$	$\frac{380}{600}$	$\frac{100}{600}$	$\frac{100}{600}$	$\frac{20}{600}$

Второе распределение.

ω	1,2	1,3	...	1,25	2,1	2,3	...	25,24
$p(\omega)$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{600}$	...	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{600}$	...	$\frac{1}{600}$

188. $P(A) = \frac{19}{30}$; $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{29}{30}$; $P(D) = \frac{1}{30}$.

189. а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 1.

190. а) $\frac{1}{210}$; б) $\frac{1}{C_7^3} = \frac{3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{35}$. **191.** $\frac{21}{27} = \frac{7}{9}$.

192. а) $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$;

б) рассмотрим пространство из четырех исходов, приведенное в таблице (П — плохой билет, Х — хороший билет).

ω	ПП	ПХ	ХП	ХХ
$p(\omega)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{19}{30}$

Благоприятными исходами будут ПП и ХП, поэтому искомая вероятность будет $\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$. Поясним, как вычислить вероятность каждого из четырех указанных в таблице исходов. Вытащить друг за другом 2 билета из 25-ти можно $25 \cdot 24$ способами. Из них $5 \cdot 4$ способов соответствуют исходу ПП, $5 \cdot 20$ способов — исходу ПХ, $20 \cdot 5$ способов — исходу ХП, $20 \cdot 19$ способов — исходу ХХ.

193. Рассмотрим пространство из четырех исходов:

ω	ББ	БЧ	ЧБ	ЧЧ
$p(\omega)$	$\frac{20}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{6}{56}$

Тогда искомая вероятность будет

$$\frac{20}{56} + \frac{6}{56} = \frac{13}{28} \approx 0{,}4643.$$

194. Имеет. Вероятность, что жребий выпадет на того, с кого начинается счет, будет $\frac{12}{25} < \frac{1}{2}$. Чтобы получить этот ответ, рассмотрите в качестве исходов все возможные значения суммы очков на двух руках и найдите их вероятности.

195. а) Какой бы кубик вы ни выбрали, ваш соперник все равно будет в выигрыше. Точнее, он всегда сможет выбрать из оставшихся кубиков такой, что вероятность его выигрыша будет больше $\frac{1}{2}$:

P *{второй выиграет у первого}* $= \frac{21}{36}$;

P *{третий выиграет у второго}* $= \frac{21}{36}$;

P *{первый выиграет у третьего}* $= \frac{25}{36}$.

Это так называемый «парадокс нетранзитивности», хорошо известный вам по спортивным состязаниям: «Спартак» выигрывает у «Динамо», «Динамо» у ЦСКА, а ЦСКА у «Спартака» — кто же из них самый сильный?

Самое разумное, что вы можете сделать в задаче с «нетранзитивными» кубиками, — выбрать из трех кубиков тот, что сильнее снизит ваш проигрыш. В данном случае это будет первый или второй кубик.

б) Теперь бросать будут сразу три кубика, поэтому надо найти три вероятности:

P {максимум очков будет на 1-м кубике} = $\frac{25}{108}$;

P {максимум очков будет на 2-м кубике} = $\frac{45}{108}$;

P {максимум очков будет на 3-м кубике} = $\frac{51}{108}$.

Как ни странно, теперь лучше брать третий кубик!

196. Как ни странно, $\frac{1}{2}$. Хотя добраться до этого ответа совсем не просто. Будем считать, что вместо стрельбы по мишени биатлонист бросает монету: «орел» — попал, «решка» — промазал. Такая замена вполне допустима, поскольку вероятность попадания каждого выстрела $\frac{1}{2}$. Попробуем выписать благоприятные исходы (при которых будут поражены все три мишени):
ООО — потрачено 3 патрона;
ООРО, ОРОО, РООО — потрачено 4 патрона;
ООРРО, ОРОРО, РООРО, ОРРОО, РОРОО, РРООО — потрачено 5 патронов. Вероятность исхода ООО — $\frac{1}{8}$, каждого из исходов в следующей строке — $\frac{1}{16}$, а в третьей строке — $\frac{1}{32}$. Складывая вероятности всех благоприятных исходов, получим:

$$1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2}.$$

197. а) Шансы на выигрыш одинаковые — по $\frac{1}{2}$.

б) Теперь шансы разные: первый игрок выигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$, второй игрок — с вероятностью $\frac{3}{4}$.

198. $\frac{2}{3}$. Чтобы получить этот ответ, нужно взять в качестве пространства исходов не три кассеты, а шесть разных сторон этих кассет — ведь, случайно вставляя кассету в магнитофон, мы выбираем не только одну из трех кассет, но и одну из ее двух сторон: Б1, Б2, М1, М2, Б, М (Б — Бах, М — Моцарт, цифра — номер стороны). Вероятности всех шести исходов одинаковые и равны $\frac{1}{6}$. Поскольку зазвучал Бах, то был выбран один из трех исходов Б1, Б2, Б. Два из трех указанных исходов благоприятны для того, чтобы с другой стороны снова зазвучала музыка Баха.

199. а) — г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{1}{3}$. См. решение предыдущей задачи.

200. Занумеруем все бутылки числами от 1 до 100. Исход нашего эксперимента — это последовательность из 100 чисел: номер бутылки для первого камешка, номер бутылки для второго и т. д. Всего таких последовательностей 100^{100}, и все они равновероятны. Отсюда можно найти вероятности:

а) $\frac{99^{100}}{100^{100}} = 0{,}366$; б) $\frac{100 \cdot 99^{100}}{100^{100}} = 0{,}3697$;

в) $\frac{100^{100} - 99^{100} - 100 \cdot 99^{99}}{100^{100}} = 0{,}2643$.

201. $\frac{C_{N-M}^{k-M}}{C_N^k}$ при $M \leqslant k \leqslant N$.

202. Интересно, что наиболее вероятное число пар — одна:

$P(A) = \frac{156}{729} = 0{,}214$; $P(B) = \frac{423}{729} = 0{,}580$; $P(C) = \frac{144}{729} = 0{,}198$;

$P(D) = \frac{6}{729} = 0{,}008$.

Легче всего найти $P(D)$ и $P(C)$ — с них лучше и начать. Потом найти $P(A)$, а $P(B)$ вычислить по правилу вычитания.

203. 30 белых шаров. **204.** Около 20%.

205. Около 27 400. **206.** Около 47%.

207. Нет, нельзя. Вы можете слишком сильно отличаться от среднестатистического жителя.

208. а) Мальчик и девочка; б) двое; в) двое.

209. Около 250.

210. 10 см. **211.** 15—16 см.

212. Нет. Произошло событие, вероятность которого $\frac{1}{4}$ — его никак нельзя считать маловероятным.

213. Есть. Произошло событие, вероятность которого равна

$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} = 0{,}005$, — очень маловероятное.

214. Есть. Произошло событие, вероятность которого равна

$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{60 \cdot 59 \cdot 58} = 0{,}0064$, — очень маловероятное.

215. Более 6700.

216. У Олега.

217. Ни одного $\left(\text{с вероятностью } \frac{87}{187} \approx 0{,}47\right)$.

218. 10 и 11 $\left(\text{та и другая суммы имеют вероятность } \frac{1}{8}\right)$.

219. Вероятность угадать номер с первой, второй, ..., десятой попытки одна и та же — $\frac{1}{10}$.

220. 2 ящика. Для точного решения задачи нужно найти вероятности пяти событий:

$$P\,\{\textit{нет пустых ящиков}\} = \frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625} = 0{,}0384;$$

$$P\,\{\textit{один пустой}\} = \frac{5 \cdot 4 \cdot C_5^2 \cdot 3!}{5^5} = \frac{48}{125} = 0{,}384;$$

$$P\,\{\textit{три пустых}\} = \frac{C_5^3 \cdot (2^5 - 2)}{5^5} = \frac{12}{125} = 0{,}096;$$

$$P\{\text{четыре пустых}\} = \frac{5}{5^5} = \frac{1}{625} = 0{,}0016;$$

$$P\{\text{два пустых}\} = 1 - \frac{24}{625} - \frac{48}{125} - \frac{12}{125} - \frac{1}{625} = 0{,}480.$$

Можно решить задачу менее точно, но зато намного проще: вероятность, что конкретный ящик (например, первый) останется пустым, будет $\frac{4^5}{5^5} = 0{,}328$. Значит, из пяти ящиков пустыми окажутся $5 \cdot 0{,}328 = 1{,}64 \approx 2$ ящика.

221. Около 37 ящиков. Решать эту задачу так же точно, как предыдущую, слишком сложно (нужно будет посчитать вероятность 100 событий!). А вот оценить количество ящиков приближенно можно так же, как объяснялось выше: вероятность, что конкретный ящик (например, первый) останется пустым, будет $\frac{99^{100}}{100^{100}} = 0{,}366$. Значит, из ста ящиков пустыми окажутся приблизительно

$$100 \cdot 0{,}366 = 36{,}6 \approx 37 \text{ ящиков.}$$

222. а) 37; б) 37; в) 26.

223. Шесть и более — вероятность такого события будет 0,002.

224. По нашим правилам — нет. Обнаружить 2 и больше бракованных лампочек из 10 можно с вероятностью 0,016 — это еще не маловероятное событие. Хотя лучше всего подвергнуть эту партию дополнительному контролю.

225. а) Открыть такой замок с трех и менее попыток можно с вероятностью $\frac{1}{40} = 0{,}025$ — это еще не маловероятное событие. Возможно, этому человеку просто повезло.

б) На пять цифр.

226. Есть. Произошло событие вероятности $9 \cdot 10^{-13}$ — слишком маловероятное.

227. 7 билетов.

228. За 18 и более правильных ответов.

	1	2	3	4	5	6
1	0213937286	3191361863	4478130729	1835164006	5258974864	0505413366
2	2771141785	7496744205	7638114898	6039690224	7910962020	5671274455
3	5777938196	7244302088	8404081714	8599791745	0667999078	2532216068
4	1007277247	4583113048	2866521572	4221632857	2769559644	1958539644
5	6931119545	2638325080	3103884582	5363759078	9591183254	7124016256
6	7076926810	4611474898	1408243542	2473101346	0441590178	8970410704
7	0516798322	7589594344	9519328489	1438363016	8276451074	5139270324
8	4887131810	8634779234	4280134780	7316945286	1832932311	3341499092
9	8975857471	4009502118	9433572543	9229223137	2313703561	4995945204
10	7291127597	8277401208	4470543476	7320750474	9203679265	1447339350
11	6433031684	0917445000	2340617992	9322576258	9134706968	4070407172
12	7582108205	5997955562	8034852416	2398852662	1245266267	1873281121
13	9607163693	4067899927	2958456589	7115435159	2801975590	0315541359
14	1044960448	4669831308	4526550169	7362486207	9090315584	8102623577
15	7979428975	8085238162	7237262242	9265749635	1040444412	0317845177
16	3670758372	2631245430	3574643679	8688850601	5315024761	0971451381
17	2737292103	5059017065	6719866484	7922010255	4175986291	4474637415
18	7527326073	7982633960	9561396969	4592909179	9074320088	1010860434
19	9773601945	8657977636	2111636670	0497008363	3232411326	7624904505
20	6300416828	8506943311	8803535139	1631878112	8788211371	1137151578

(2400 случайных цифр от 0 до 9)

	1	2	3	4	5	6
21	0078918298	7169882292	7527263491	7368022004	3457373629	6979683878
22	9588637698	2124109004	2987803806	5334456225	1807860998	7116139631
23	9720592284	8050097258	2118447796	7389081764	0285283840	3885869726
24	5239857623	2754987365	8844189405	0897416855	5644204074	3841485455
25	9341926012	9168638076	7307816613	2180228344	4135837810	0176403522
26	4572268050	6357796522	2032920129	7421859004	2190554250	5546565688
27	4934900428	7770376489	4980774428	8298936986	5973418194	7053355223
28	3114922558	3767716827	4860231595	4447767203	3634973349	1186535072
29	5074213826	5967261767	6591083710	3146386267	2772803019	3811723949
30	7054181723	1231980752	1396239320	4579633434	8693230005	8325156619
31	3476430139	4133674842	8933895388	1899884566	0879593497	0601007988
32	4612721110	3647294857	2196067393	9691141000	8809040139	5696484801
33	7290504115	2154190013	8413391492	0031113863	7682527512	2215974616
34	5199975446	1072133949	1540783674	4149739674	6706613834	7767742321
35	9110606441	7379131523	2563960715	2771455647	0579180241	0242420544
36	2925438163	2841477327	8262105895	4255267393	3094337103	1597963322
37	5711055642	0390737810	9549309184	5878775209	7564599761	4047527059
38	2876516899	2385735483	2421458044	3252722091	7096930548	1068191423
39	2821239399	9505416419	4807924720	0741945908	8764042143	3771157408
40	8650182099	5551672315	5087077538	2301779995	7894604961	5028601381

Содержание

Теория вероятностей неразрывно связана с нашей повседневной жизнью и становится в настоящее время неотъемлемой частью школьного курса математики. Книга "Вероятность и статистика" подготовит школьника к решению насущных жизненных задач: выбору наилучшего из возможных вариантов, оценке степени риска, шансов на успех и других.

дрофа

ISBN 5-7107-4582-0

9 785710 745823