Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2023-2024 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

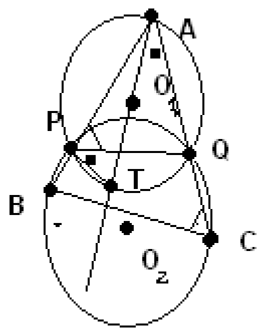
11 класс

11.1. Доказать, что если для трёх ненулевых чисел x, y, z выполняются равенства $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, то либо $x=y=z$, либо $x^2y^2z^2=1$.

Доказательство. Преобразуем равенства в условии. $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z} \Leftrightarrow xyz+z=y^2z+y$, последнее эквивалентно $yz(x-y)=y-z$. Аналогично, из второго равенства получаем $zx(y-z)=z-x$ и из равенства $x+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{x}$ получаем $xy(x-z)=y-x$. Перемножим все три равенства $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(x-z)=(y-z)(z-x)(y-x)$. Если хотя бы одна скобка равна нулю, например $x=y$, то из равенства $yz(x-y)=y-z$ следует и $y=z$, в этом случае $x=y=z$. Если ни одна из скобок не равна 0, их можно сократить, получив вторую возможность $x^2y^2z^2=1$.

Критерии проверки. (●) Сделано преобразование $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z} \Leftrightarrow yz(x-y)=y-z$ **:** 2 балла **(●)** Выполнено перемножение трёх равенств: 2 балла. **(●)** Получен первый случай $x=y=z$: 1 балл. **(●)** Получен второй случай $x^2y^2z^2=1$: 2 балла.

11.2. Две окружности пересекаются в точках P и Q, при этом центр O_1 первой окружности лежит вне второй, а центр O_2 второй окружности- вне первой. На первой окружности вне второй выбрана произвольная точка A, отличная от P и Q, через неё проведены две прямые AP и AQ, пересекающие второй раз вторую окружность в точках B и C соответственно вне первой. Докажите, что прямые AO_1 и BC перпендикулярны.



Доказательство. Перпендикулярность прямых AO_1 и BC следует из того, что сумма величин углов ACB и CAO_1 равна 90°. Докажем последнее утверждение. Обозначим вторую точку пересечения прямой AO_1 с первой окружностью за T, отметим, что отрезок AT – диаметр первой окружности и опирающийся на него угол APT – прямой. Разобьём его в сумму углов APQ и QPT. Углы QPT и QAT=CAO_1 равны, как вписанные в первую окружность и опирающийся в ней на общую хорду TQ. Четырёхугольник PQCB вписан во вторую окружность, поэтому его угол QCB=ACB равен 180° минус угол QPB, то есть равен смежному с последним углу APQ. Следовательно, сумма величин углов ACB и CAO_1 равна величине прямого угла APT, то есть 90°, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Замечено, что перпендикулярность прямых AO_1 и BC следует из того, что сумма величин углов ACB и CAO_1 равна 90°: 1 балл. **(●)** Замечено, что AT – диаметр первой окружности и опирающийся на него угол APT – прямой: 1 балл. **(●)** Показано равенство углов QPT и QAT=CAO_1: 1 балл. **(●)** Показано равенство углов QCB=ACB и APQ: 2 балла. **(●)** Показано, что сумма величин углов ACB и CAO_1 равна величине прямого угла APT: 2 балла.

11.3. В турнире по олимпийской системе участвуют 8 борцов одинаковой силы, среди которых есть Вася и Петя. Их случайным образом разбивают на 4 пары, после чего победителей в каждой паре также случайно разбивают на две пары, победители которых встречаются в финале. В каждой схватке каждый из борцов побеждает другого с вероятностью ровно $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что Вася и Петя встретятся между собой в ходе турнира?

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Решение. Занумеруем борцов так, чтобы в финале встретились победитель среди борцов 1,2,3,4 и победитель среди борцов 5,6,7,8, а в полуфинале – победитель пары 1,2 с победителем пары 3,4, и победитель пары 5,6 с победителем пары 7,8. Всего имеется 8! случаев распределения 8 борцов по этим 8 номерам. Рассмотрим все три случая, когда Вася и Петя таки могли встретиться в турнире.

1) Вася и Петя встретились в первой схватке. Это могло произойти, если они были распределены в одну из пар номеров (1,2),(3,4),(5,6),(7,8), что могло произойти $4\cdot 2\cdot 6!$.способами – каждый из них в одной из 4 пар двумя способами и остальные 6 по 6 оставшимся номерам 6! способами.

2) Вася и Петя встретились во второй схватке. Это могло произойти, если они были распределены в разные пары номеров {1,2},{3,4} из первой четвёрки (1,2,3,4) или в разные пары номеров {5,6},{7,8} из второй четвёрки (5,6,7,8) и оба победили в своих первых схватках. Это могло произойти $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 6! = 16\cdot 6!$ способами, число которых нужно умножить на вероятность $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ выигрыша обоими своих первых схваток, что в итоге даёт $4\cdot 6!$.

3) Вася и Петя встретились в третьей схватке. Это могло произойти, если они были распределены в разные четвёрки {1,2,3,4} и {5,6,7,8} и оба победили в своих первых двух схватках. Это могло произойти $2\cdot 4\cdot 4\cdot 6! = 32\cdot 6!$ способами, число которых нужно умножить на вероятность $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ выигрыша обоими двух своих первых схваток, что в итоге даёт $2\cdot 6!$.

Сумму чисел благоприятных исходов во всех трёх случаях делим на общее число возможностей, получаем ответ: $\frac{8\cdot 6!+4\cdot 6!+2\cdot 6!}{8!}=\frac{8+4+2}{7\cdot 8}=\frac{1}{4}$.

Критерии проверки. (●).Рассмотрение трёх случаев: 1 балл. **(●)** Верная схема комбинаторного подсчёта количества возможных случаев в каждом из случаев 1), 2), 3): по 1 баллу за каждый **(●)** Верное умножение на $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{16}$ во втором и третьем случаях: по 1 баллу за каждый. **(●)**. Верное деление суммы чисел благоприятных исходов во всех трёх случаях на общее число возможностей: 1 балл.

11.4. Найти все натуральные N такие, что числа $4N-3$ и $9N+1$ являются квадратами натуральных чисел.

Ответ. $N=7$.

Решение 1. Обозначим $4N-3=x^2$ и $9N+1=y^2$**,** тогда $4y^2-9x^2=(2y+3x)(2y-3x)=31$**.** Число 31 разлагается в произведение двух натуральных множителей единственным способом, поэтому $2y+3x=31,\ 2y-3x=1$**,** откуда $x=5, y=8, N=7$**.**

Решение 2. Обозначим $4N-3=x^2$ и $9N+1=y^2$**,** тогда $9N=y^2-1=(y-1)(y+1)$. Оба числа $y-1$ и $y+1$ делиться на 3 одновременно не могут, поэтому ровно одно из них делится на 3 и на 9.

а) Пусть $y-1$ делится на 9, тогда $y=9t+1$, а $N=(9t+2)t$. Следовательно. $x^2=4N-3=4(9t+2)t-3=36t^2+8t-3>36t^2$. Но следующий за точным квадратом $(6t)^2=36t^2$ точный квадрат $(6t+1)^2=36t^2+12t+1$ уже будет больше $36t^2+8t-3$, поэтому такое невозможно.

б) Пусть $y+1$ делится на 9, тогда $y=9t-1$, а $N=(9t-2)t$. Следовательно. $x^2=4N-3=4(9t-2)t-3=36t^2-8t-3<36t^2$. Предшествующий точному квадрату $(6t)^2=36t^2$ точный квадрат $(6t-1)^2=36t^2-12t+1$ может равняться $36t^2-8t-3$ при $t=1$, что даёт решение $N=7$. А вот квадрат $(6t-2)^2=36t^2-24t+4$ уже меньше $36t^2-8t-3$, поэтому больше решений нет.

Критерии проверки. (●) Угадан правильный ответ $N=7$ 1 балл.

В решении 1 **(●)** Получено равенство $4y^2-9x^2=31$: 3 балла. 1 **(●)** Сделано разложение $4y^2-9x^2=(2y+3x)(2y-3x)=31$: 1 балл. **(●)** Получена система $2y+3x=31,\ 2y-3x=1$: 2 балла.

В решении 2 **(●)** Показано, что $(y-1)(y+1)$ делится на 9: 1 балл. **(●)** Показано, что одно из чисел $y-1$ и $y+1$ на 9: 1 балл. **(●)** Показано, что $N=(9t\pm 2)t$: 1 балл. **(●)** Правильное рассмотрение каждого из пунктов а) и б): по 2 балла.

11.5. Каждое из натуральных чисел от 1 до n окрасили в красный или синий цвет и подсчитали среднее арифметическое красных чисел и среднее арифметическое синих чисел. После этого одно из красных чисел перекрасили в синий цвет, после чего среднее арифметическое красных чисел и среднее арифметическое синих чисел одновременно увеличились на одно и то же число x. Найти максимальное значение x.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим за α и β средние арифметические красных и синих чисел до перекраски соответственно, за t - перекрашенное число, и за k - количество красных чисел сначала. По условию, $\alpha k-t=(\alpha+x)(k-1)$, откуда $t=\alpha-x(k-1)$. Аналогично, $\beta(n-k)+t=(\beta+x)(n-k+1)$, откуда $t=x(n-k+1)+\beta$. Приравниваем $\alpha-x(k-1)=x(n-k+1)+\beta$, получаем $x=\dfrac{\alpha-\beta}{n}$. При фиксированном k максимальное среднее арифметическое значение любых k чисел из интервала от 1 до n не превосходит среднего арифметического k максимальных чисел $n-k+1,..,n-1,n$, то есть $\alpha\le\dfrac{n-k+1+...+n-1+n}{k}=\dfrac{2n-k+1}{2}$. Аналогично, при фиксированном k минимальное среднее арифметическое значение любых $n-k$ чисел из интервала от 1 до n не меньше среднего арифметического $n-k$ минимальных чисел $1,2,..,n-k$, то есть $\beta \le \frac{1+2+...+n-k}{k} = \frac{n-k+1}{2}$. Следовательно, $x = \frac{\alpha-\beta}{n} \le \frac{1}{n}(\frac{2n-k+1}{2} - \frac{n-k+1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Пример. Если в красный цвет покрашены числа $n-k+1,..,n-1,n$, а в синий – числа $1,2,..,n-k$, то до перекраски их средние арифметические равнялись $\alpha = \frac{2n-k+1}{2}$ и $\beta = \frac{n-k+1}{2}$ соответственно. После перекраски числа $n-k+1$ в синий цвет, эти средние станут равны $\alpha' = \frac{2n-(k-1)+1}{2} = \frac{2n-k+2}{2} = \alpha + \frac{1}{2}$ и $\beta' = \frac{n-(k-1)+1}{2} = \frac{n-k+2}{2} = \beta + \frac{1}{2}$, соответственно, оба увеличатся на $\frac{1}{2}$.

Критерии проверки. (●) Приведён правильный ответ и пример, на котором он достигается: 2 балла. **(●)** Вычисления оценки доведены только до выражения $x = \frac{\alpha-\beta}{n}$: 2 балла. **(●)** Доказано, что $\frac{\alpha-\beta}{n} \le \frac{1}{2}$: 3 балла. **(●)** Отсутствует проверка примера: минус 1 балл.