

# Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ

10 класс

4 февраля 2025 года

Вариант МА2400109

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

## Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

***Желаем успеха!***

## Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

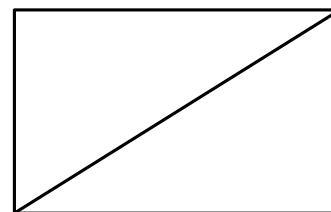
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

**Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

- 1 Периметр прямоугольника равен 14, а диагональ равна 6. Найдите площадь этого прямоугольника.

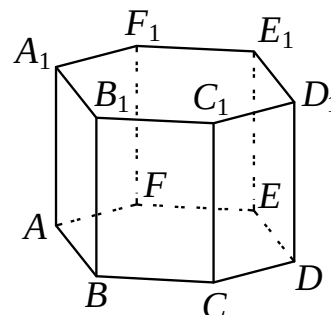


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Даны векторы  $\vec{a}(-4; 12)$  и  $\vec{b}(-11; 0)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 31. Найдите тангенс угла  $B_1 E E_1$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 16 спортсменов из России, в том числе Тарас Куницын. Найдите вероятность того, что в первом туре Тарас Куницын будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Ответ: \_\_\_\_\_.



- 9 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 = 140$  Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \frac{c+u}{c-v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ — скорость распространения сигнала в среде (в м/с),}$$

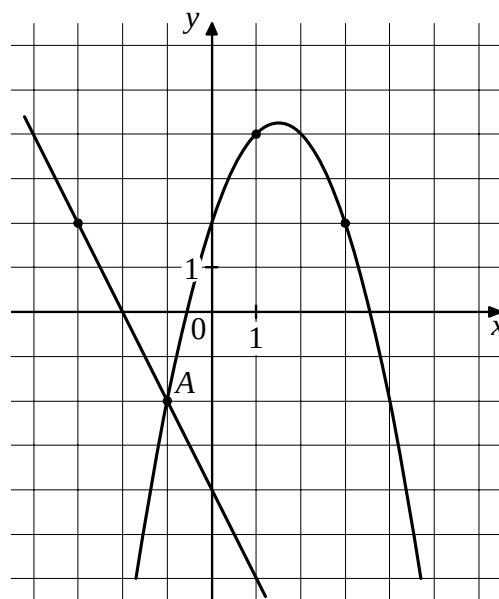
а  $u = 9$  м/с и  $v = 13$  м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике  $f$  будет не менее 145 Гц?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 В сосуд, содержащий 6 кг 14-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 6 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображены графики функций  $f(x) = -2x - 4$  и  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , которые пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 - 18x + 87}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

**13** а) Решите уравнение  $8\sin^2 x - 6\cos x - 3 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

**14** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E : EA = 3 : 1$ , а на ребре  $BB_1$  — точка  $F$  так, что  $B_1 F : FB = 3 : 5$ . Известно, что  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 16$ .

а) Докажите, что плоскость  $EFD_1$  делит ребро  $B_1 C_1$  на два равных отрезка.

б) Найдите угол между плоскостью  $EFD_1$  и плоскостью  $AA_1 B_1$ .

**15** Решите неравенство  $\frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 4x} \leq 2 - \frac{8}{x + 3}$ .

**16** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на срок 5 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите  $r$ , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 4,2 млн рублей, а наименьший — не менее 2,76 млн рублей.

**17** Периметр треугольника  $ABC$  равен 24. На сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $BE : EA = BF : FC = 3 : 1$ . Прямая  $EF$  касается окружности, вписанной в треугольник.

а) Докажите, что  $AC = 3$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$ .

**18**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8|x - y| + 8|a|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

**19**

а) Приведите пример такого натурального числа  $n$ , что числа  $n^2$  и  $(n + 22)^2$  дают одинаковый остаток при делении на 50.

б) Сколько существует трёхзначных чисел  $n$  с указанным в пункте а свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел  $m < 50$ , для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел  $n$ , таких, что  $n^2$  и  $(n + m)^2$  дают одинаковый остаток при делении на 50?

# Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ

10 класс

4 февраля 2025 года

Вариант МА2400110

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

## Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

***Желаем успеха!***

## Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

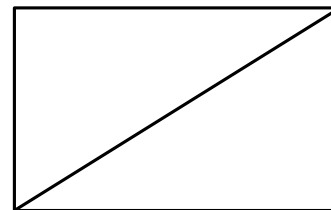
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

*Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.*

- 1 Периметр прямоугольника равен 66, а диагональ равна 32. Найдите площадь этого прямоугольника.

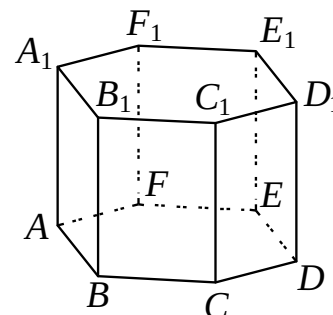


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Даны векторы  $\vec{a}(-9; 4)$  и  $\vec{b}(0; 7,5)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 50. Найдите тангенс угла  $AD_1 D$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 20 спортсменов из России, в том числе Максим Плотвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Плотвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: \_\_\_\_\_.



- 5 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: \_\_\_\_\_.

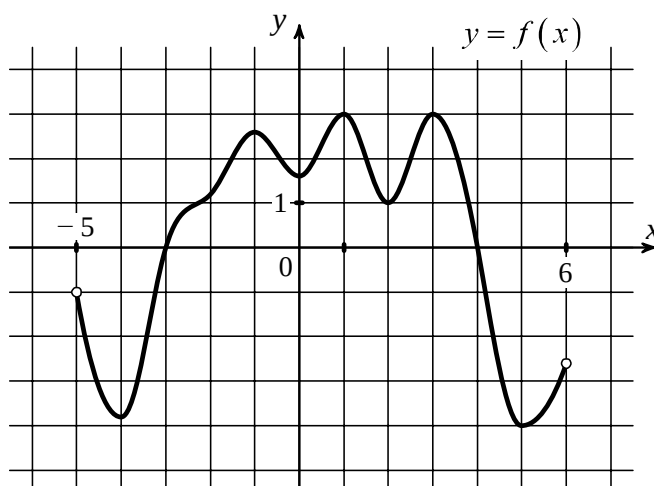
- 6 Найдите корень уравнения  $\frac{2}{3}x = -13\frac{1}{3}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $(4a^2 - 81) \cdot \left( \frac{1}{2a-9} - \frac{1}{2a+9} \right)$  при  $a = \sqrt{31} + 5$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 11$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9** При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 = 120$  Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \frac{c+u}{c-v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ — скорость распространения сигнала в среде (в м/с),}$$

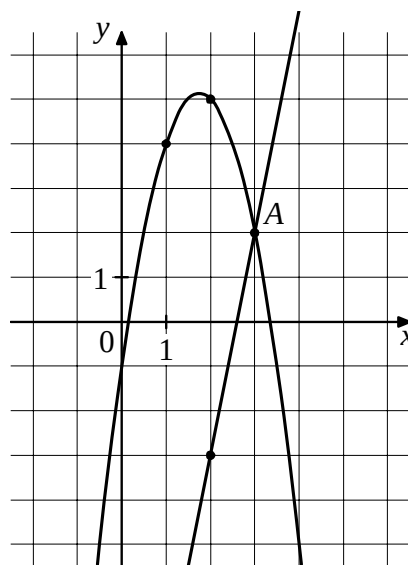
а  $u = 5$  м/с и  $v = 8$  м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике  $f$  будет не менее 130 Гц?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10** В сосуд, содержащий 4 кг 18-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = 5x - 13$  и  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , которые пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12** Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 + 6x + 32}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

**13** а) Решите уравнение  $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

**14** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E : EA = 6 : 1$ , а на ребре  $BB_1$  — точка  $F$  так, что  $B_1 F : FB = 3 : 4$ . Известно, что  $AB = 7\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 14$ .

а) Докажите, что плоскость  $EFD_1$  делит ребро  $B_1 C_1$  на два равных отрезка.

б) Найдите угол между плоскостью  $EFD_1$  и плоскостью  $AA_1 B_1$ .

**15** Решите неравенство  $\frac{3x + 28 - x^2}{x^2 - 7x} \leq 2 + \frac{2}{x + 3}$ .

**16** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 15 млн рублей на срок 6 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите  $r$ , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 4,9 млн рублей, а наименьший — не менее 2,9 млн рублей.

**17** Периметр треугольника  $ABC$  равен 30. На сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $BE : EA = BF : FC = 3 : 2$ . Прямая  $EF$  касается окружности, вписанной в треугольник.

а) Докажите, что  $AC = 6$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$ .

**18**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6|x - y| + 6|a|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

**19**

а) Приведите пример такого натурального числа  $n$ , что числа  $n^2$  и  $(n+14)^2$  дают одинаковый остаток при делении на 40.

б) Сколько существует трёхзначных чисел  $n$  с указанным в пункте а свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел  $m < 40$ , для каждого из которых существует ровно 90 трёхзначных чисел  $n$ , таких, что  $n^2$  и  $(n+m)^2$  дают одинаковый остаток при делении на 40?